

Klangerzeugung am Klavier

Sebastian Kuhl

Klangerzeugung am Klavier

Schriftliche Hausarbeit für die Zulassung zum 1. Staatsexamen für das Lehramt an
Gymnasien
im Studiengang LaG
an der
Hochschule für Musik und Theater München

vorgelegt von
Sebastian Kuhl

Bei

Prof. DDDr. Mastnak
München, 01.04. 2014

INHALT

1. Einleitung	4
2. Grundlegendes zur Klangerzeugung am Klavier.....	7
2.1. Der „Sofortklang“ und der „Nachklang“	10
2.2. Die Mehrhörigkeit der Saiten	14
2.3. Una Corda – Das linke Pedal.....	15
2.4. Schwebungen	17
3. Theoretische physikalische Betrachtung von Klavier - Saiten.....	21
3.1. Physikalische Interpretation der Lösung der Bewegungsgleichung.....	26
4. Die Testreihen	29
4.1. Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Saitenklanges in Abhängigkeit der Anschlagsstärke bei gleichbleibender Tonhöhe? (am Beispiel der Töne „kleines c“ und „C3“).....	31
4.2. Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Saitenklanges in Abhängigkeit der Tonhöhe (bei gleichbleibender Anschlagsstärke)?.....	37
4.3. Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Tastengeräusches in Abhängigkeit der Anschlagsstärke? (Untersuchung beider Anschlagsarten).....	40
4.4. Das „obere“ und das „untere“ Tastengeräusch.....	46
4.5. Das Tastengeräusch im Verhältnis zum erzeugten Saitenklang	48
4.6. Harmonische und inharmonische Schwingungen	50
5. Die Wahrnehmung von Klang und Tonintensität.....	54
6. Schlussbetrachtung.....	57
Literaturverzeichnis	59
Anhang	60
Herleitung und Lösung der Schwingungsgleichungen einer eingespannten Saite.....	64
Lösung:	67
Erklärung.....	72

1. EINLEITUNG

Klang – Das ist ein Begriff, der eine Brücke schlägt zwischen der physikalischen Welt der Klangerzeugung und der psychischen Welt des ausführenden Künstlers, bzw. des Zuhörers.

Die Klangentstehung am Klavier beinhaltet deswegen grundsätzlich immer beide Aspekte und das Zusammenwirken dieser Komponenten: Das Klavier selbst, und den Pianisten, der darauf spielt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den physikalischen sowie auch mit den mathematischen Aspekten des Klavierklanges. Deshalb sei hier zu Beginn klar definiert, was im Folgenden unter „Klang“ verstanden wird: Die Geräuschsumme aller schallerzeugenden Elemente des Instrumentes.

Symbolisch könnte man das so formulieren: Wir haben eine Konstante (das Klavier) und eine Variable (den Pianisten). Das Produkt der beiden Faktoren ergibt Klavierklang. Doch ist es dem Pianisten überhaupt möglich an einem „fertigen“ Flügel verschiedene Klangfarben zu erzeugen? Im Laufe der Zeit hat sich diese Frage – zumindest für manche Menschen - zu einer Art Mysterium entwickelt. Um der Antwort auf die Frage ein Stück näher zu kommen, muss zuerst klargestellt werden, wonach gesucht wird. Im Normalfall wird der Klavierklang immer in den Kontext einer musikalischen Interpretation eines Musikstücks eingebettet sein. Einzelne Töne¹, die in keiner musikalischen Verbindung zueinander stehen, kommen in der Klavierliteratur so gut wie nicht vor. Der Zuhörer, der den Klang eines gehörten Klavierstücks beschreibt, ist also - einmal abgesehen von seiner subjektiven Hörempfindung - immer mit einer Vielzahl von aufeinander folgenden sowie gleichzeitig erklingenden Tönen konfrontiert. Die Interpretation eines Klavierstücks, die sich in der Agogik, Phrasierung und der Dynamik widerspiegelt, gibt dem Pianisten nahezu unendlich viele verschiedene Vortragsmöglichkeiten. Da sich die gespielten Töne auch immer gegenseitig

¹ Reine Sinustöne können auf akustischen Musikinstrumenten nicht erzeugt werden. Ein realer Ton besteht vielmehr aus einem Tongemisch harmonischer Teiltöne und unterschiedlich starken inharmonischen Anteilen.

beeinflussen², sind die Möglichkeiten der Klangfarbenerzeugung für einen versierten Pianisten fast unerschöpflich. Für ein reales von einem Pianisten gespieltes (hinreichend anspruchsvolles) Klavierstück gilt deswegen: Die komplizierten, schwer zu durchschauenden physikalischen Vorgänge aller am Klang beteiligten Prozesse sind sowohl von der Theorie her als auch praktisch kaum analytisch (unter Einbeziehung des musikalischen Inhaltes) zu beschreiben. Anders verhält es sich mit den einzelnen, für sich stehenden Tönen. Betrachtet man einmal die Hammermechanik³ eines Klaviers, stellt man schnell fest, dass der Hammer das letzte Stück vor der Saite freischwingend zurücklegt. Dies ist in erster Linie notwendig, um die Repetition einzelner Töne zu ermöglichen. Zu Recht wird behauptet, dass es dem Pianisten folglich nur möglich sei, die Lautstärke des Klanges zu beeinflussen, nicht aber dessen Farbe, denn ein direkter Kontakt zwischen Finger (beim Anschlag) und der Saite besteht zu keinem Zeitpunkt. Folglich ist es dem Pianisten ausschließlich möglich, die Geschwindigkeit des Hammers (und damit die Lautstärke) zu kontrollieren. Die exakt gestellte Frage lautet also:

Ist es möglich die Klangfarbe eines einzelnen Tones bei gleichbleibender Lautstärke zu verändern?

Unbestreitbar ist, dass die Lautstärke und der daraus resultierende „Saitenklang“ einzig und allein von der Geschwindigkeit abhängig sind, mit welcher der Hammer auf die Saite auftrifft, da er zu diesem Zeitpunkt frei schwingend ist. Was jedoch die Sache der durch den Anschlag entstehenden Geräuschentwicklung der Mechanik betrifft, verhält sich die Sache wesentlich komplizierter. Bei genauerer Betrachtung ergibt sich ein nahezu undurchschaubares Geflecht von resonanten Wechselwirkungen und Rückbeziehungen zwischen den klangerzeugenden mechanischen Teilen und den zum Zeitpunkt des Anschlags freischwingenden Saiten, die zum Beispiel durch den Gebrauch des rechten Pedals noch erheblich verstärkt werden. Im Gegensatz zur Klangerzeugung durch den Aufschlag des Hammers auf der Saite (die nur von der Auftreffgeschwindigkeit des Hammers abhängt) ist die Geräuschentwicklung der mechanischen Teile ein komplexer zeitlicher Vorgang, der von den verschiedenen Phasen der Vorgänge beim Tastendruck abhängt. Im „Pianistenjargon“ werden sehr oft Begriffe wie „weicher“ und „harter“ Anschlag verwendet. So ist zum Beispiel bei

² Die Schallwellen zweier angeschlagener Töne überlagern sich je nach Frequenz und Intensität verschieden stark und erzeugen somit unterschiedliche Klangeindrücke

³ Vgl. Abbildung der Hammermechanik im Anhang

einem „weichen“ Anschlag die Beschleunigung zu Beginn und am Ende des Kontakts zwischen Taste und Finger geringer als in der dazwischenliegenden Phase des Bewegungsablaufes.

Das heißt, die entstehende Beschleunigung ist nicht konstant. Wichtig ist, sich klarzumachen, dass im Laufe dieses Bewegungsvorganges unterschiedliche Geräuschanteile entstehen (wie etwa zu Beginn des Tastendrucks das Geräusch zwischen Finger und Taste und am Ende das Geräusch zwischen Taste und Tastengrund). Die entstehenden Lautstärken bei diesen einzelnen Phasen sind allem Anschein nach in erster Näherung proportional zu der in dieser Phase anliegenden Kraft oder Beschleunigung.

Da jede Anschlagsart ein charakteristisches zeitliches Beschleunigungsprofil, ausgelöst durch unterschiedliche Kraftanteile während des Anschlages, aufweist, ist es durchaus denkbar, dass durch unterschiedliche Anschlagsarten unterschiedlich laute Anschlaggeräusche bei gleichbleibender „Saitenlautstärke“ entstehen.

Da die Anschlaggeräusche wiederum resonante Wirkungen auf die freischwingenden Saiten haben, ist dadurch tatsächlich eine direkte Beeinflussung des Gesamtklanges durch die Art des Anschlages physikalisch erklärbar.

Im Laufe dieser Arbeit werden sowohl die ‚konstanten‘ als auch die ‚variablen‘ Bestandteile des Klavierklangs untersucht. Eine komplette Analyse der Klangerzeugung am Klavier unter Einbeziehung aller Klang-Möglichkeiten würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Der Einfluss des rechten Pedals, genannt „Forte – Pedal“ wurde deshalb nicht untersucht und die Analyse auf einzelne Töne beschränkt (ohne Einbeziehung des rechten Pedals).

2. GRUNDLEGENDES ZUR KLANGERZEUGUNG AM KLAVIER

Zunächst seien die wichtigsten physikalischen Bestandteile eines Klavieres, bzw. Flügels genannt:

- Die Tastatur besteht im Regelfall aus circa 88 Tasten (Holz oder Kunststoff).
- Die Mechanik (je nach Modell ein unterschiedlich kompliziertes Konstrukt aus Holz, das den Kontakt zwischen der angeschlagenen Taste und der durch den Hammer angeschlagenen Saite herstellt).
- Die Saiten: Ein moderner Flügel besitzt ca. 230 Stahlsaiten, die jeweils mit einer Kraft von ca. 1000 - 3000 N gespannt werden. Die tiefen Saiten besitzen eine Umspannung aus Kupfer-Draht (da dieser die Masse erhöht, was wiederum bei gleicher Schwingungsfrequenz zu kürzeren, praktikableren Saitenlängen führt). Die Saiten der hohen Töne stehen unter einer höheren Spannung als die tiefen Töne (um eine höhere Klangqualität durch längere, praktikablere Saitenlängen zu ermöglichen).
- Der Resonanzboden: Er ist mit das wichtigste schwingende Element und erzeugt den größten Teil der Klangfülle.
- Der gusseiserne Rahmen: Er hält die gewaltige Zugspannung der Saiten.

József Gát listet in seinem Buch, *Die Technik des Klavierspiels (1964)*, grundlegende Tatsachen der Klangerzeugung am Klavier auf:

1. Es ist ein wesentliches Kennzeichen des Klaviermechanismus, dass der Hammer in der Lage ist, nach dem Anschlagen der Saite sofort zurückzuschnellen, weil er sonst die Schwingung der Saite behindern würde. Hierzu ist erforderlich, dass er den allerletzten Teil seines Weges völlig frei zurücklegen kann. Je kürzer der Weg, den der Hammer frei zurücklegt, umso mehr fühlt der Klavierspieler, dass er Macht über die Bewegung des Hammers hat. Im Augenblick des Anschnellens muss sich aber der Hammer völlig frei, von der Taste unabhängig bewegen, damit er ungehindert zurückschnellen kann.

2. ‚Da sich der Hammer im Augenblick des Anschnellens völlig frei bewegt, ist in dieser Bewegung die Geschwindigkeit der einzige veränderliche Faktor‘ (*H. Backhaus, Nichtstationäre Schallvorgänge*).
3. Mit der Geschwindigkeit des Hammers wächst proportional die Lautstärke.
4. Die Geschwindigkeit des Hammers hängt im Augenblick des Anschnellens ausschließlich von der im Auslösungspunkt erreichten Geschwindigkeit der Taste ab‘ (*W. Lange, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik. S. 45, 120, 159 (1935)*) Wenn also der Klavierspieler die Geschwindigkeit des Hammers (den Ton) verändern will, muss er die Geschwindigkeit der Taste ändern.
5. Außer der Bauweise des Klaviers (Besaitung, Material und Bearbeitung des Resonanzbodens usw.) hängt die Klangfarbe in erster Linie von der Art der Filzbespannung des Hammers und von der Qualität (dem Zustand) seines Materials ab. [...]
6. [...]
7. Die Zahl der Obertöne wächst in direktem Verhältnis zur Geschwindigkeit des Hammers‘ (*E. Meyer, H. Buchmann, Berliner Bericht, S. 735, 1931*). Mit den Veränderungen der Lautstärke geht also auch eine gewisse Klangfarbenänderung einher. (Die entstehende Klangfarbenänderung wird durch die Resonanzelemente des Instruments – in erster Linie durch den Resonanzboden – verursacht. [...])
8. Der stärker angeschlagene Ton verklingt verhältnismäßig schneller als der schwächer angeschlagene (*O. Vierling, Diss. Univ. Berlin, 1935*).
9. Hohe Töne verklingen schneller als tiefe Töne (*F. Urbach und H. Schlesinger: Wiener Anz. 21, 208, 1936*). Deswegen ist die Anwendung des Dämpfers bei den oberen Oktaven des Klaviers überflüssig.

Der Klavierklang als solcher lässt in zwei Phasen darstellen. Die Folgenden Ausführungen über Sofort – und Nachklang, Saitenmehrhörigkeit, das „una corda“ – Pedal und über Schwebungen beziehen sich größtenteils auf einen von Gabriel Weinreich 1979 veröffentlichten Artikel *The coupled motion of piano strings*.⁴

⁴ Weinreich, G. (Januar 1979). The Coupled Motions of Piano Strings. *Scientific American*

Die Klavier oder Flügelmechanik so wie wir sie heute kennen, geht auf den italienischen Cembalo-Bauer Bartolommeo Cristofori zurück. Er baute 1709 den Prototyp des modernen Klaviers, in welchem gegen die Saiten schlagende Hämmer für die Tonerzeugung verantwortlich waren. Seitdem wurden Klaviere (und auch Flügel) immer mit mehreren Saiten pro Ton ausgestattet. Die Klaviatur des heutigen Steinway Model B hat 88 Tasten, wobei die oberen 68 mit drei Saiten pro Ton sowie die 20 unteren mit zwei oder nur einer Saite versehen sind. Obwohl die Verdreifachung und Verdoppelung von Saiten schon Mitte des 17. Jahrhunderts eingeführt wurde, zeigten neuere akustische Erkenntnisse, dass zumindest die Verdoppelung und Verdreifachung der jeweiligen Saite die Klangqualität beeinflusst. (mehrere Saiten pro Ton bzw. Taste werden im Folgenden als „Gleichklanggruppe“ bezeichnet). So unterscheiden sich die zwei oder drei Saiten eines Tones in ihrer Frequenz geringfügig voneinander, selbst wenn sie exakt eingestellt werden. Ein erstaunliches Phänomen ist, dass eine minimale Diskrepanz zwischen den jeweiligen Saitenfrequenzen, im Gegensatz zu gleichen Frequenzen, vom Zuhörer als schöner empfunden wird.

Beim Drücken einer Klaviertaste schlägt der Filzhammer die entsprechende Saitengruppe von zwei oder drei Saiten an. Zeitgleich wird der Dämpfer, ein Stück aus weichem Filz, angehoben, sodass die Saiten frei schwingen können. Jeder „mit musikalischer Absicht“ erzeugte Klang hat seinen Ursprung in den vom Instrument ausgehenden Vibrationen. In Blas- und Streichinstrumenten wird der Klang grundsätzlich aufrechterhalten, wohingegen die Schwingung beim Klavier nach dem Anschlag nicht mehr beeinflussbar ist: Nach dem Auftreffen des Hammers wird keine Energie mehr zugeführt. Tatsache ist, dass die Klangcharakteristik des Klaviers hauptsächlich davon abhängt, wie die Energie auf die Saiten übertragen wird. Da die Energiezufuhr nur durch Anschlag der Saite erfolgt, verändern sich die akustischen Eigenschaften mit dem Energieverbrauch.

Die Schwingungsenergie nimmt wegen der unvermeidlich auftretenden Reibungskräfte zeitlich ab. Diese treten in verschiedenen Teilen des Klaviers auf und sind meist proportional zur Geschwindigkeit des Hammers sind. Schwingt die Saite mit einer kleinen Amplitude, ist die Energieabnahme linear: Die Geschwindigkeit, mit welcher

die Saite an Energie verliert, ist proportional zur Menge der enthaltenen Energie. In einem solchem, linearen System, ist die nimmt die Vibration exponentiell ab.⁵

Schalldruck ist, wie auch die Lautstärke, eine physikalische Größe, mit der sie jedoch nicht exakt gleichgesetzt werden kann. Schalldruck ist ein grundsätzliches physikalisches Phänomen, wohingegen Lautstärke als psychophysikalisches Phänomen gilt, das nicht allein von den physikalischen Klangeigenschaften abhängt, sondern eben auch von den daraus resultierenden Reaktionen von Ohr und Gehirn. Eine Verdoppelung des Schalldrucks muss also nicht zwingend als Verdoppelung der Lautstärke empfunden werden. Für den qualitativen Gebrauch jedoch kann man Lautstärke und Schalldruck gleichsetzen.

2.1. DER „SOFORTKLANG“ UND DER „NACHKLANG“

Nun ist das Ausklingen einer einzelnen (also aus der Gleichklanggruppe gelöst) Klaviersaite deutlich komplizierter als es die einfache Gerade in einem Diagramm vermuten lassen würde. Das Schalldruck-Pegel-Zeit-Diagramm lässt sich nicht als Gerade, sondern vielmehr als eine gekrümmte Linie darstellen, welche aus zwei Konstanten besteht: nämlich dem Startmoment (im Folgenden „Sofortklang“ genannt) gefolgt von einer schnellen Dämpfung und dem langsamen Ausklingen (im Folgenden „Nachklang“ genannt) ab einem niedrigeren Pegel. Das bedeutet, dass, obwohl das Abklingen des Tones exponentiell erfolgt, sich die Abklingrate sehr abrupt ändert. Der erste und schnelle Klangabfall charakterisiert den Sofortklang, das langsame finale Abklingen den Nachklang. Der Sofortklang zeichnet sich durch eine Art „Knall“ ähnlich wie beim Xylophon aus, wobei dieser, im Gegensatz zu einem am Klavier

⁵ Das Verhältnis der Lautstärke zweier Klänge wird in Dezibel angegeben, wobei jeweils 20 Dezibel mit einer Schalldruckveränderung des Faktors 10 gleichgesetzt werden. Demzufolge entspricht eine Abdämpfung von 40 Dezibel einem Schalldruckverlust von 2 x Faktor 10 oder Faktor 100. Eine Abdämpfung von 10 Dezibel entspricht also dem Faktor $\sqrt{10} = 3.16$. Wird der Schalldruck durch sein Zahlenverhältnis (in Dezibel) in einem genauen Wert angegeben, wird dieser als Schalldruck-Pegel bezeichnet (sound-pressure level). Ein Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass bei einem exponentiellen Abfall ein Schalldruck-Level-Zeit-Diagramm eine „Gerade“ ergeben würde.

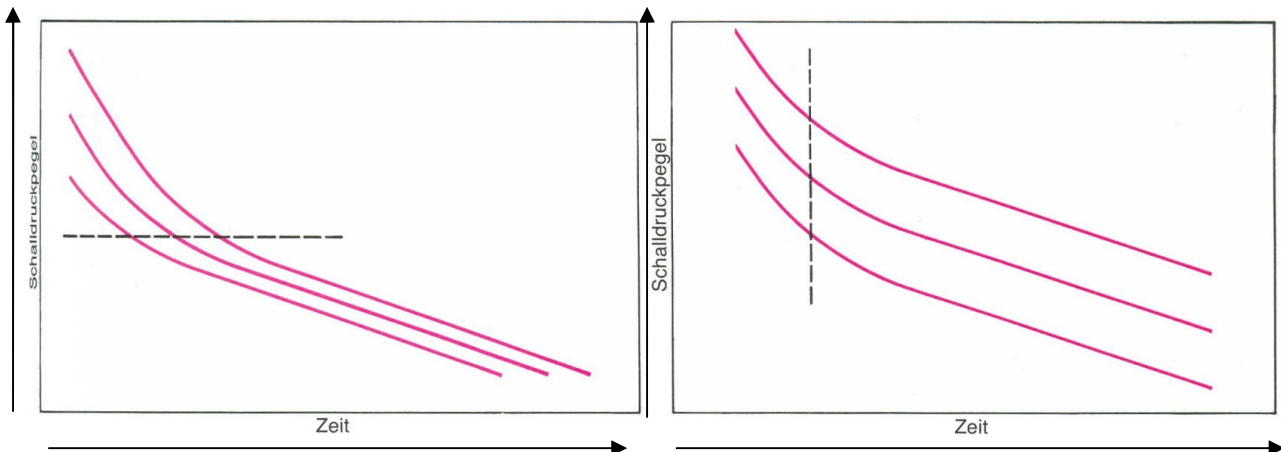
erzeugten Ton, nach ein paar Sekunden verklungen ist. Es ist der Nachklang, der es ermöglicht, lang gezogene Töne und gebundene Melodien am Klavier zu erzeugen, die auf einem Xylophon nicht gespielt werden können.

Die proportional zum höheren Schalldruck größer auftretenden Reibungskräfte verursachen ein schnelleres Abklingen am Anfang. Solche Nichtlinearitäten findet man gewöhnlich in vielen anderen physikalischen Systemen. Ein Pendel beispielsweise, das an seinem Drehpunkt nur geringer Reibung ausgesetzt ist, wird durch nichtlineare Luftreibung ausgebremst (der Luftwiderstand wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit). Bei größeren Amplituden ist der Luftwiderstand entsprechend größer als bei kleinen Amplituden (bei größeren Amplituden übt die stärker verwirbelte Luft eine proportional stärkere Kraft auf das Pendel auf als die weicher durchlaufene Luft bei kleinen Amplituden).

Der Übergang vom Sofortklang zum Nachklang erfolgt jedoch nicht aufgrund von Nichtlinearitäten der Reibungskräfte bzw. der Schwingung. Wären die Reibungskräfte nichtlinear, würde der Übergang zwischen dem schnellen und dem langsamen Ausklingen, unabhängig von der verwendeten Anschlagsstärke, immer bei gleicher Lautstärke, also gleichem Schalldruck, erfolgen. Diese würde lediglich die Dauer des Sofortklangs beeinflussen. In diesem Fall würde eine Funktion aus Schalldruckpegel und Zeit für verschiedene Anschlagstärken horizontal verschobene Graphen erzeugen (vgl. Abbildung 1, linkes Bild).

Tatsächlich findet der Übergang zwischen Sofort- und Nachklang aber auch bei unterschiedlichem Schalldruck, immer nach der gleichen Zeit, gemessen ab der Bewegungszuführung (also dem Anschlag) statt. Anders gesagt: Der „Sofortklang“ hat immer dieselbe Dauer und der Nachklang setzt immer nach einer festen Zeit nach dem Anschlagen der Saite ein.

ABBILDUNG 1



Reibungskräfte die bei höherem Schalldruck auch entsprechend höher ausfallen sind nicht für den Übergang des Anschlagklangs zum Nachklang verantwortlich. Unabhängig von der Anfangsbewegung der Saite, würden solche nichtlinearen Reibungskräfte für einen Wechsel vom „Sofortklang“ zum „Nachklang“ sorgen. In diesen Fall wären die verschiedenen Zeitfunktionen des Schalldrucks, welche bei unterschiedlichen Anfangsverschiebungen gemacht wurden, horizontale Verschiebungen derselben Funktion. (links). Es zeigt sich jedoch, dass es sich bei den Funktionen um vertikale Verschiebungen derselben Funktion handelt, was ein Merkmal von linearer Reibung ist. Deshalb hat der Anschlagklang unabhängig von der anfänglichen Verschiebung der Saite immer dieselbe Zeitdauer.

In einem linearen System wie dem System der Klaviersaite kann die Amplitude einheitlich vergrößert oder verkleinert werden, ohne dass Bewegungsqualität beeinflusst wird. Was also beeinflusst die Abklingrate? Es hat sich herausgestellt, dass eine einzelne Saite für sich auf zwei unterschiedliche Arten schwingt (Polarisation). Diese werden im Folgenden als horizontale und vertikale Schwingung bezeichnet. Andere Bewegungen, wie kreis- und ellipsenförmige, können als Überlagerung der zwei Grundausrichtungen betrachtet werden. Es mag seltsam erscheinen, dass ein vertikaler Hammeranschlag der Saite überhaupt eine horizontale Schwingung entstehen lässt (die Saite schwingt auch hauptsächlich vertikal). Die kleine horizontale Schwingung könnte das Resultat von kleinen Unebenheiten der Hammeroberfläche oder Verschiebungen der Saite sein. Die schwache horizontale Schwingung resultiert also daraus, dass der Hammer die Saite nicht perfekt vertikal trifft.

Die Verwendung einer sensiblen Sonde ermöglichte *G. Weinreich* die Messung der horizontalen sowie der vertikalen Schwingung einer einzelnen Saite. Beide Schwingausrichtungen fallen exponentiell, die vertikale jedoch weitaus schneller als die

horizontale ab. Das bedeutet, dass, obwohl die vertikale Schwingung anfangs viel stärker als die horizontale ist (wahrscheinlich mindestens um den Faktor 10), die Chance besteht, dass die horizontale Schwingung die dominierende wird. Demzufolge verursacht die vertikale Schwingung den kurzen Sofortklang und die horizontale Schwingung den länger andauernden Nachklang.

Weshalb ist die Abfallrate der beiden verschieden ausgerichteten Schwingungen so verschieden? Verantwortlich dafür ist die Tatsache, dass die Saite auf unterschiedliche Art und Weise an Energie verliert. Durch den Verlust wird die Energie entweder in Wärme (Saite) umgewandelt, die Luft wird in Bewegung gesetzt (Schallabstrahlung), oder sie geht über in das Trägermaterial der Saiten. Letzteres ist beim Klavier vorwiegend der Fall. Die Saiten sind in einen Eisenrahmen und über eine schmale „Holzbrücke“, den Steg gespannt. Der steht in direktem Kontakt zu Resonanzboden, welcher übrigens hauptsächlich zum typischen Klang eines Klaviers oder eines Flügels beiträgt (der überwiegende Teil des Schalls wird hier erzeugt). Der Steg ist es, der den Resonanzboden synchron mit den Saiten schwingen lässt. Da der Resonanzboden in vertikaler Richtung weitaus besser schwingfähig ist als in horizontaler, kann er die vertikalen Schwingungen der Saite gut abnehmen. Das ist der Grund für den schnellen Abfall der vertikalen Schwingungsenergie der Saite – und für den charakteristischen Sofortklang.

Hier stellt sich nun die Frage, ob die horizontal und vertikal initiierten Schallwellen aus derselben Quelle des Klaviers stammen. Falls das nicht der Fall sein sollte und die Schallwellen mit vergleichbarer Intensität auftreten, käme es zu einer Überlagerung. Das heißt, eine neue Schallwelle würde entstehen, deren Amplitude der Summe der Amplituden der „Einzelwellen“ entspricht. Messungen an unterschiedlichen Positionen (rund um das Klavier herum) ergaben, dass tatsächlich zum Zeitpunkt des Übergangs zwischen Sofort- und Nachklang und an verschiedenen Punkten, sich Wellen überlagerten, also sich gegenseitig verstärkten beziehungsweise auslöschten. Das bedeutet, dass die durch horizontale und vertikale Saitenschwingung verursachten Schallwellen unterschiedlicher Herkunft (innerhalb des Klaviers) sind. Der typische „Nachklang“, wie er bereits beschrieben wurde, ist also das Resultat einer horizontalen Saitenschwingung.

2.2. DIE MEHRCHÖRIGKEIT DER SAITEN

Doch auch die Mehrchörigkeit der Saiten trägt zur Entstehung des Nachklanges bei. Die Saiten einer Gleichklanggruppe liegen sehr nahe beisammen, was den Effekt hat, dass sich ihre Einzelschwingungen gegenseitig beeinflussen. Schwingt eine Saite, überträgt der Steg die Schwingungen auf die anderen Saiten einer Gruppe und umgekehrt. Es hat sich herausgestellt, dass die „gekoppelte“ Schwingung das Abklingen der Saite (in einer Gleichklanggruppe) abschwächt, also die Saiten länger klingen lässt. Dementsprechend sind zwei (unabhängige) Phänomene für den Nachklang verantwortlich: Die horizontale Schwingung der Saite sowie die Mehrchörigkeit der Saiten.

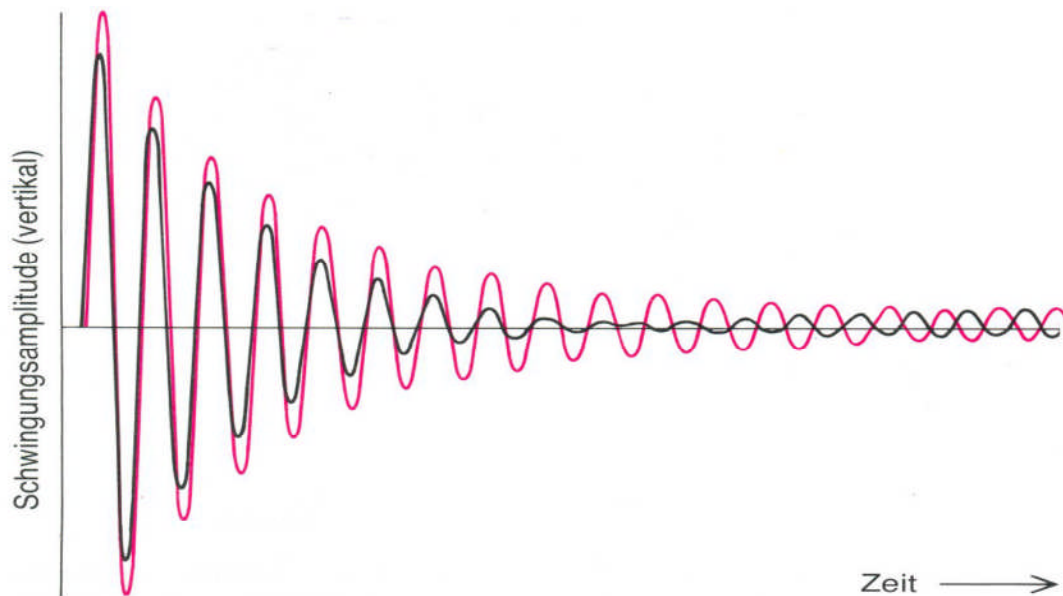
Der Effekt der verringerten Dämpfung bei mehrchörigen Saiten, hängt stark mit der Bewegung des Stegs zusammen. Sind zwei Saiten an derselben Stelle über den Steg gespannt, die mit gleicher Frequenz und Amplitude, aber in entgegengesetzter Phase schwingen (d. h. eine Saite schwingt nach oben, während die andere nach unten schwingt), ist die Gesamtkraft, die auf den Steg übertragen wird, gleich null. Schwingen die beiden Saiten in der gleichen Phase (sowie mit gleicher Frequenz und Amplitude), wird der Steg doppelt so stark in Schwingung versetzt, als wenn nur eine Saite schwingen würde. Folglich verdoppelt sich auch die Abklingrate. Dasselbe Prinzip der Energieableitung beim Zwei-Saiten System gilt auch bei drei Saiten.

Betrachtet man nun den Fall, dass zwei Saiten in der gleichen Phase schwingen, jedoch die erste mit einer größeren Amplitude als die zweite. Beide Saiten verlieren anfangs Energie und zwar schneller, als wenn sie alleine für sich schwingen würden, da sie sich gegenseitig „helfen“, den Steg in Bewegung zu versetzen. Erreicht die Amplitude der zweiten Saite den Nullpunkt, schwingt der Steg trotzdem weiter, da er noch von der ersten Saite angeregt wird. Folglich wird die Amplitude der zweiten Saite nicht nur null, es entsteht weiter eine gegenphasige Schwingung durch Absorption der Energie des Stegs.

Schwingen die beiden Saiten mit entgegengesetzter Phase, ist wiederum die Schwingung des Stegs geringer, als wenn nur eine Saite schwingen würde. Die beiden Amplituden nähern sich asymptotisch mit entgegengesetzten Phasen. Letztendlich schwingen sie exakt asymmetrisch. Es ist die anfängliche symmetrische Schwingung

der beiden Saiten, die den Anschlagklang erzeugt, und die spätere asymmetrische Schwingung, die für den Nachklang verantwortlich ist.

ABBILDUNG 2



Unebenheiten in der Hammeroberfläche führen zu ungleichmäßigen Schwingungsamplituden. Die Abbildung zeigt zwei Saiten die zeitgleich in Schwingung versetzt wurden. Die rote Amplitude ist etwas größer als die schwarze. Die Schwingungen werden mit der Zeit abgeschwächt und sobald die „schwarze“ Saite den Nullpunkt erreicht hat, entsteht eine gegenphasige Schwingung beeinflusst durch den Steg, der ja unter der Einwirkung der „roten“ Saite immer noch weiter schwingt. Letztendlich entstehen zwei perfekt asymmetrische Schwingungen, die mitunter verantwortlich für den „Nachklang“ sind

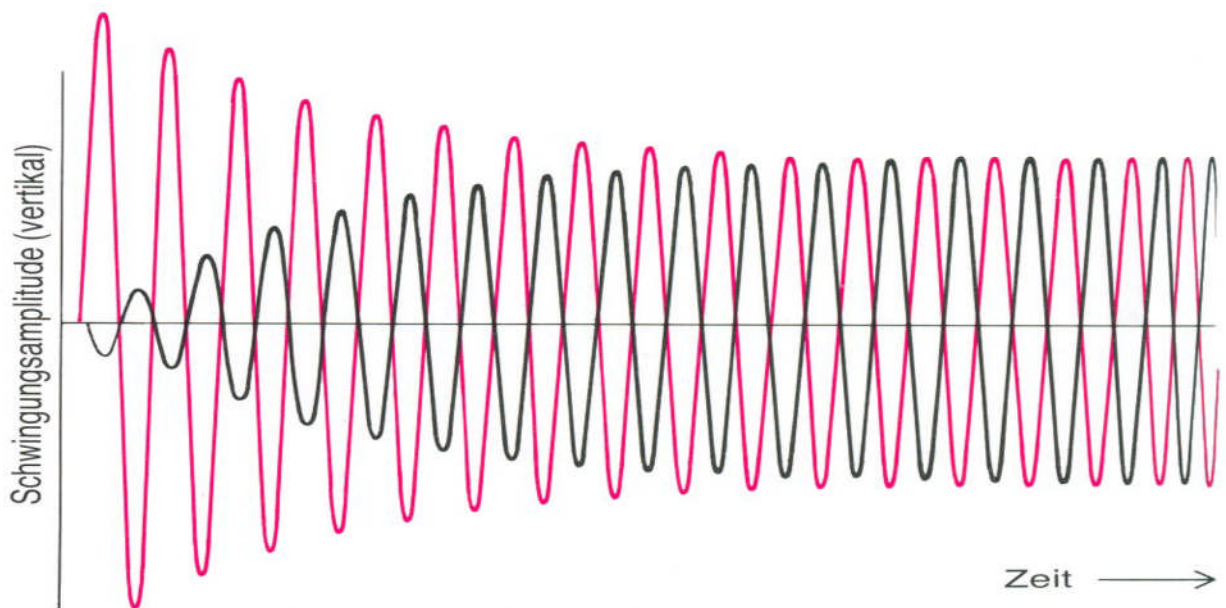
2.3. UNA CORDA – DAS LINKE PEDAL

Den Effekt der asymmetrischen Schwingungen macht sich auch das linke Pedal (una corda) zunutze. Für gewöhnlich liegt der Nachklang in seiner Lautstärke circa 20 Dezibel unter der des Anschlagklangs. Für sehr leise und weiche Passagen verwenden Pianisten deshalb oft die Vorrichtung des „una corda“ – Pedals (theoretisch ist es auch möglich ohne das linke Pedal sehr leise Klänge zu erzeugen, nur würden diese deutlich schneller verklingen). Es bewirkt, dass die komplette Klaviatur (samt Mechanik) so verschoben wird, dass der Hammer beim Drücken der Taste, nur noch zwei von drei

Saiten (in einer Gleichklanggruppe) berührt. Durch die vergleichsweise geringe Anregung der Saiten (während einer sehr leisen Passage beispielsweise) schwingen beide Saiten nahezu exakt symmetrisch. Die verbliebende dritte Saite, die nicht vom Hammer getroffen wurde, beginnt nun die Schwingungsenergie des Stegs zu absorbieren, der ja synchron mit den beiden anderen Saiten schwingt. Sofort beginnt die dritte Saite mit umgekehrter Phase zu schwingen und verstärkt somit den Nachklang im Vergleich zum Anschlagsklang – die Saite klingt länger.

Doch die Klangfarbe verändert sich auch noch durch einen anderen Effekt: „Durch ständigen Gebrauch entsteht auf der Filzverkleidung des Hammers (an dem der Saite zugekehrten Teil) ein Einschnitt und verhärtet sich. Wenn sich beim Niederdrücken des linken Pedals die Hammerreihe nach rechts verschiebt, dann berührt statt der verhärteten Stelle wieder weicher Filz die Saite, und wir erhalten dementsprechend einen weicheren, leiseren Ton.“⁶

ABBILDUNG 3



Bei Benutzung des linken Pedals werden anstatt drei nur noch zwei Saiten angeschlagen. Eine asymmetrische Schwingung besteht als von Beginn an. Es entsteht ein deutlich leiserer Klang, der allerdings sehr langsam an Intensität verliert. Die nicht angeschlagene Saite (schwarz) beginnt die Energie des Stegs zu absorbieren, welcher synchron zur anderen Saite (rot) schwingt. Das „una corda“-Pedal ermöglicht es, den Klang auch bei sehr leisen Passagen „am Leben“ zu erhalten.

⁶ Gát, J. (1973). *Die Technik des Klavierspiels*. Kassel, Basel, London: Bärenreiter, S. 10

2.4. SCHWEBUNGEN

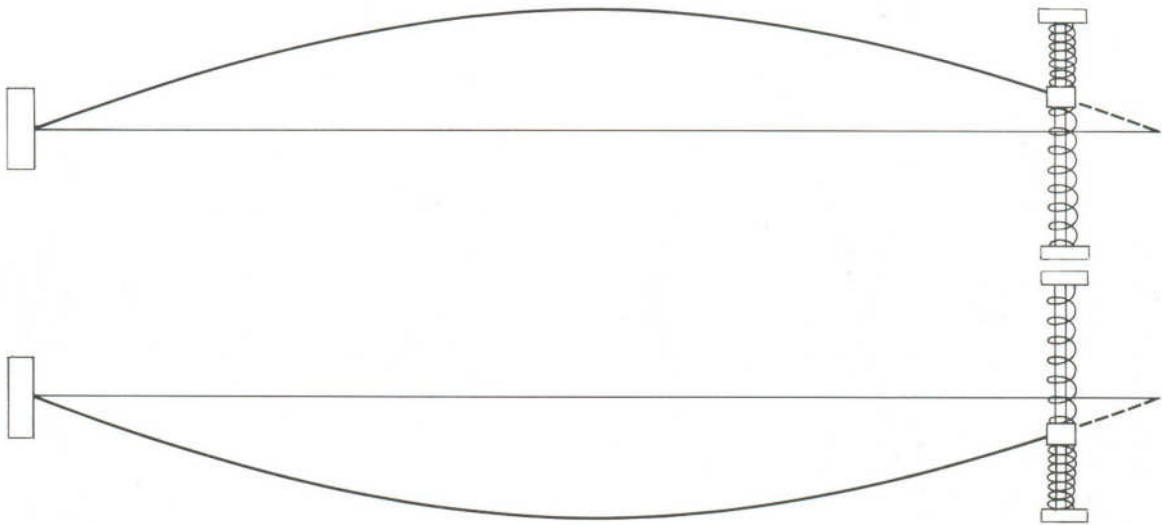
Wenn zwei unabhängige Schwingungen, dessen Frequenzen sich nur geringfügig unterscheiden interferieren, wechseln diese ständig zwischen dem Zustand der Verstärkung (selbe Phase) und dem der Extinktion (umgekehrte Phase). Der Zuhörer nimmt dadurch einen Ton beständiger Frequenz wahr, dessen Lautstärke schwankt. Dieser Effekt wird als Schwebung bezeichnet. Nun ist es beim Klavier so, dass zwei nebeneinander liegende Saiten durch den Einfluss des Stegs nie unabhängig voneinander schwingen. Folglich sind nicht nur die Frequenzen, sondern auch die Dämpfungsraten deutlich betroffen. Schwebungen werden im Gegensatz zu rein gestimmten Saiten als angenehmer empfunden.

Allein die Stegbewegung führt nicht zwangsläufig zu einem Energieverlust der Saite. In bestimmten physikalischen Systemen (Energieerhaltungssystem) wird die Energie durch zwei untergestellte Systeme erhalten. G. Weinreich untersucht drei mögliche Fälle der Saitenbefestigung:

- Die federnde Befestigung (reibungsfrei)
- Die Befestigung an einem trägem Masseteilchen (reibungsfrei)
- Die Reibung erzeugende Befestigung (die am Steg tatsächlich auftritt)

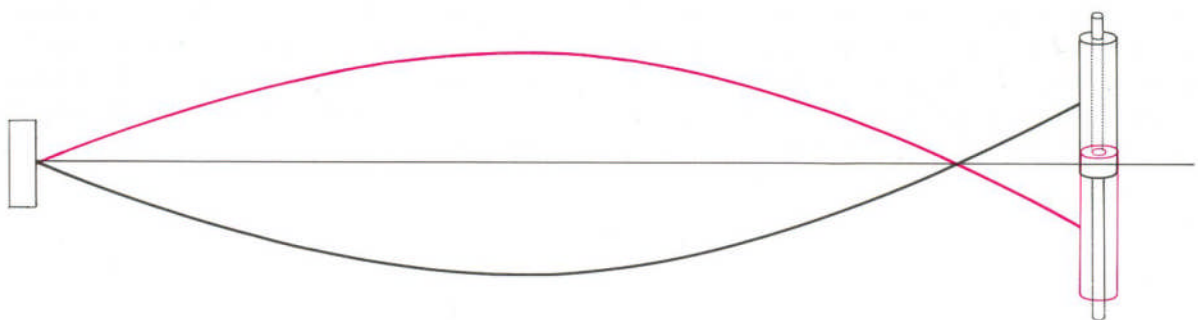
Die federnde und reibungsfreie Befestigung beschreibt eine Saite, die an einem Ende an einem Ring befestigt ist, welcher sich zwischen zwei Federn reibungsfrei auslenken lässt. Beim Durchlauf einer Schwingungsperiode speichert beziehungsweise verrichtet der Ring Arbeit. Durch diese Konstruktion wird als ein zusätzliches Saitenstück simuliert. Die Saite verhält sich so, als wäre sie länger, und die Frequenz wird somit erniedrigt. Der „Netto“-Energieumsatz eines solchen Systems wäre gleich null (hier wird ein ideales reibungsfreies System angenommen. In einem realen System wäre die Deformation der Federn mit Reibung verbunden, welche dem System Energie entzieht).

ABBILDUNG 4



Die Befestigung an einem frei beweglichen Massestück beschreibt eine Saitenhaltevorrichtung, bei der die Saite zwar ebenfalls an einem Ring befestigt ist, der sich reibungsfrei auf und ab bewegen kann, aber dies nicht von sich aus beziehungsweise durch eine frei werdende Kraft tut (da keine Federn vorhanden sind), sondern nur durch Trägheit (der Einfachheit halber wird die Schwerkraft außer Acht gelassen). Das Massestück bewegt sich also solange in eine Richtung, bis die Saite es entgegengesetzt beschleunigt. Bei dieser Art der Befestigung verhält sich die Saite so, als wäre sie kürzer. Die Frequenz wird erhöht.

ABBILDUNG 5

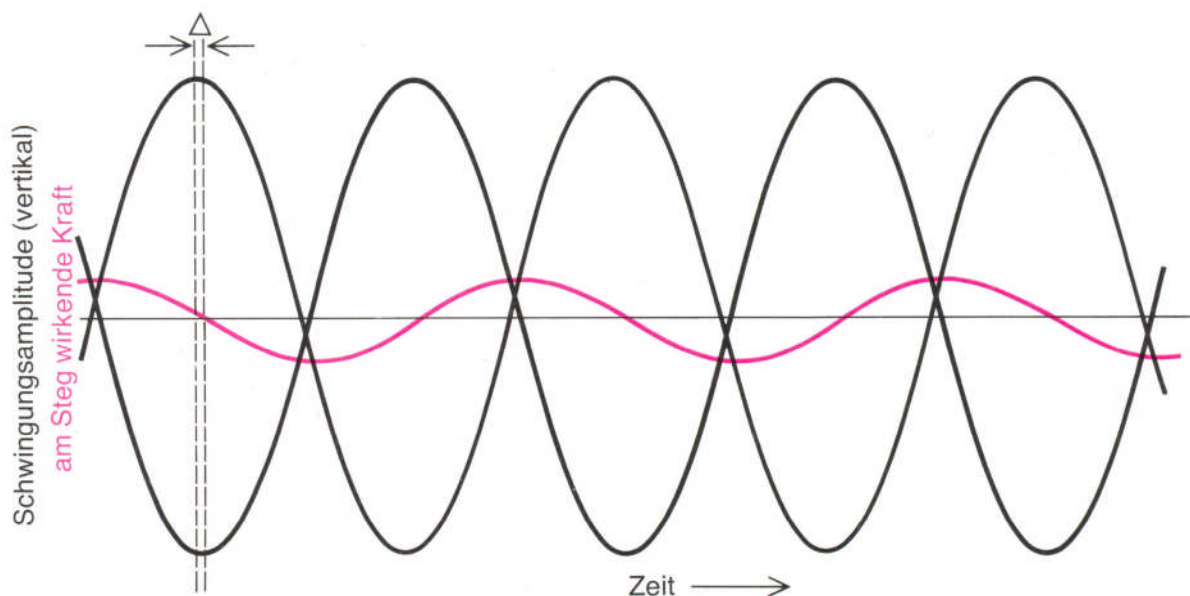


Der Fall, wie er am Steg auftritt, ist der einer „widerstandsfähigen“, reibungserzeugender Befestigung (Steg). Vergleichbar ist diese Konstruktion mit einem zwar frei beweglichen, aber eben nicht reibungsfreien Ring. Die Saite verliert in diesem System

Energie durch verrichtete Arbeit. Die Frequenz bleibt dadurch unverändert. Zwischen Saite und Ring entsteht eine Phasenverschiebung von $\pi/2$.

Um die Auswirkung auf den Klang zu betrachten, wird der Fall zweier gegenphasig (über den Steg miteinander in Kontakt stehenden) schwingender Saiten angenommen, deren Frequenz nicht exakt übereinstimmt. Aufgrund der geringfügig unterschiedlichen Frequenzen wird Kraft auf den Steg ausgeübt (Zu Beginn ist die auf den Steg einwirkende Kraft gleich null). Die höchste Krafteinwirkung auf den Steg findet bei den Nulldurchgängen der Saitenschwingungen statt. Bei den Maxima der Amplituden heben sich die Kräfte nahezu auf.

ABBILDUNG 6



Da es sich beim Steg um ein reibungserzeugendes System handelt, verschiebt sich seine Phase um $\pi/2$ und die Phasendifferenz addiert sich zu π .

Der Steg schwingt also mit einer Saite in Phase und mit der anderen in entgegengesetzter Phase. Die Saite, die in gleicher Phase schwingt, nimmt den Steg als „federnde, reibungsfrei bewegliche“ Befestigung, die andere als „massereiche, reibungsfrei bewegliche“ Befestigung wahr. Folglich wird die Frequenz der einen Saite allmählich erhöht sowie bei der anderen Saite erniedrigt, bis letztendlich beide Saiten mit derselben Frequenz schwingen. Es entsteht ein reiner, etwas länger andauernder Nachklang. In anderen Worten: Kleine Unreinheiten in den Frequenzen (Verstimmungen) lassen einen reinen lang anhaltenden Klang entstehen. Dieses

Verhalten gilt auch für zwei Saiten unterschiedlicher Frequenz, die zu Beginn in Phase schwingen, also perfekt symmetrisch angeregt wurden. Nach einer gewissen Zeit verschieben sich die Phasen hintereinander. Durch gezieltes „Verstimmen“ kann also der Nachklang am Klavier bewusst beeinflusst werden.

Die Zahl der Schwebungen (Schwebungszahl) ergibt sich aus der Differenz der Schwingungszahlen. Bei einer Überlagerung (Interferenz) von zwei Saitenschwingungen von beispielsweise 4 und 5 Hertz, entsteht also eine Schwebung je Sekunde. Dieses Gesetz findet auch in der Praxis Anwendung: Um ein Instrument mittels einer Stimmgabel mit 440 Hz auf 442 Hz zu stimmen, kann sich also an der Schwebungszahl orientiert werden. In diesem Fall muss die Saite um zwei Schwebungen pro Sekunde nach oben gestimmt werden.⁷

Schwebungen können außerdem die Entstehung von „Differenztönen“ bewirken. Differenztöne entstehen allerdings nur bei reinen Intervallen. Das Verhältnis der Schwingungszahlen einer Quint (in einer rein gestimmten Tonleiter) ist 3:2. Nimmt man die Prim bei 200 Hz und somit die Quint bei 300 Hz an, so ergibt die Differenz 100 Schwebungen pro Sekunde. So hohe Schwebungszahlen werden nicht mehr als Lautstärkeschwankungen wahrgenommen. Viel mehr entsteht ein zusätzlich hörbarer Ton mit einer Frequenz von 100 Hz (Differenzton).⁸

Das einzig rein gestimmte Intervall beim Klavier ist – bedingt durch die „temperierte“ Stimmung – die Oktav. Dennoch treten auch hier Schwebungen auf. Ausschlaggebend sind in diesem Fall die gemeinsam enthaltenen Teiltöne. Bei einer reinen Stimmung hätten diese Teiltöne dieselbe Schwingungszahl. Durch die Anwendung der „temperierten“ Stimmung weichen die Schwingungszahl der gemeinsamen Teiltöne geringfügig voneinander ab, so dass auch hier Schwebungen entstehen.⁹

⁷ Laible, U. (1993). *Fachkunde Klavierbau*. Bergkirchen: PPVMEDIEN GmbH, Edition Bochinsky, S.18

⁸ Ebenda, S.11, S. 18

⁹ Ebenda, S. 19

3. THEORETISCHE PHYSIKALISCHE BETRACHTUNG VON KLAVIER - SAITEN

Im Folgenden verwenden wir folgende physikalische Größen, mit den SI-Einheiten m (Meter), Pa (Pascal), N (Newton) . kg (Kilogramm)

l : Länge der Saite [m], z. Bsp. 1.0 m

q : Querschnittsfläche der Saite [m²], z. Bsp. $2 \cdot 10^{-3}$ m

Q : Kraft, mit der die Saite gespannt wird [N], z. Bsp. 1200 N

ρ : Massendichte der Saite [$\frac{kg}{m^3}$], z. Bsp. $7.8 \cdot 10^3$ kg/m³

P : Die durch Q hervorgerufene Spannung wird als [Pa] oder [$\frac{N}{m^2}$] bezeichnet

E : Elastizitätsmodul (Materialkonstante der Saite) [$\frac{N}{m^2}$] (beschreibt den Zusammenhang zwischen rel. Dehnung und der angreifenden Kraft). Das Elastizitätsmodul für eine typische Klaviersaite aus Stahl im mittleren Bereich beträgt z. Bsp. $2.1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$

R_m : Zugfestigkeit, in [Pa] oder [$\frac{N}{m^2}$], z. Bsp. f. Stahl: $2.5 \cdot 10^9$ bis $2.0 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$

(Hinweis: Die Zugfestigkeit steht in keinem direkten Zusammenhang zum Elastizitätsmodul, also zur ‚Härte‘ des Materials).

f : Frequenz [Hz], Cent: 100.te Teil eines Halbtones, 1 Cent = $\sqrt[1200]{2}$ [dimensionslos]

Klaviersaiten stehen unter einer hohen Spannung (typisch: 1 bis 3 kN) und werden durch einen mit Filz belegten Hammer angeschlagen. Sie erzeugen klare und „langklingende“ Töne mit bestimmbarer Tonhöhe. Im mittleren Bereich werden deutliche Anteile von natürlichen Obertönen sichtbar (die theoretisch bei ganzzahligen Vielfachen der der Grundschwingung liegen sollten). In diesem Fall sprechen wir von einem harmonischen Obertonspektrum.

Klaviersaiten können transversal (quer zur Saite) und longitudinal (in Richtung der Saite) schwingen (siehe Anhang). Die Herleitung der im Folgenden benutzen Formeln findet sich ebenfalls im Anhang.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten berechnen sich zu $c_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ (longitudinal) sowie $c_{tr} = \sqrt{\frac{P}{\varrho}}$ (transversal). Wir betrachten die möglichen harmonischen Schwingungen der Ordnung n einer Saite. Für die Wellenlängen λ_n und Ausbreitungsgeschwindigkeit c und deren Frequenzen f_n gibt es den einfachen Zusammenhang $\lambda_n = \frac{c}{f_n}$, oder $f_n = \frac{c}{\lambda_n}$.

Da wir bei Klaviersaiten stehende Wellen mit Schwingungsknoten an den Saitenenden haben, gilt $\lambda_n = \frac{2l}{n}$. Somit ergeben sich die longitudinalen und transversalen Schwingungsfrequenzen einer Klaviersaite zu:

$$\boxed{f_{n,tr} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\varrho}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{Q}{q\varrho}}} \quad \text{und} \quad \boxed{f_{n,long} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}}$$

Rechenbeispiel: Querschnitt $q = 1 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$, Massendichte $\varrho = 7.8 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$, Zugkraft $Q = 1 \text{kN}$

Saitenlänge $l = 0.6 \text{m}$, Ordnung $n = 1$, Elastizitätsmodul $E = 2.1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$:

$$f_{n,tr} = \frac{1}{1.2} \sqrt{\frac{1000}{10^{-6} \cdot 7.8 \cdot 10^3}} \text{Hz} = 298 \text{Hz} \text{ (entspricht am Klavier etwa dem Ton D4)}$$

$$f_{n,long} = \frac{1}{1.2} \sqrt{\frac{2.1 \cdot 10^{11}}{7.8 \cdot 10^3}} \text{Hz} = 4324 \text{Hz} \text{ (= höher als die Frequenz des fünfgestrichenes Cs, also des höchsten Klaviertones)}$$

Wir sehen, dass die transversale Schwingungsfrequenz wie zu erwarten von der Zugkraft Q der Saite (vierfache Zugkraft ergibt doppelte Frequenz), der Saitenquerschnittsfläche q (halber Saitendurchmesser ergibt doppelte Frequenz) sowie der Massendichte ϱ (vierfache Massendichte ergibt halbe Frequenz) abhängt. Die longitudinale Frequenz ist hier nur von theoretischem Interesse, da die entstehenden Eigenfrequenzen sehr hoch sind und nahe der Wahrnehmungsgrenze des menschlichen Ohres (bzw. darüber) liegen. Da die Anregung der longitudinalen Frequenzen durch den Anschlag des Klavierhammers gering sein dürfte, sind die longitudinalen möglichen

Frequenzen nicht von praktischem Interesse. Interessant ist jedoch, dass die longitudinalen Frequenzen nicht vom Saitendurchmesser und der Saitenspannung abhängen, sondern nur von der Materialkonstante E , also für alle Klaviersaiten den gleichen Wert haben (gleiches Material vorausgesetzt). Es wäre interessant, die Eigenschaften und die Existenz dieser longitudinalen Saitenschwingungen genauer zu untersuchen, insbesondere ob sie einen Einfluss auf den entstehenden Gesamtklang haben. Dem Autor ist nicht bekannt, ob es diesbezüglich irgendwelche wissenschaftlichen Veröffentlichungen gibt.

Im Folgenden verstehen wir unter f immer die Frequenz der transversalen Schwingungen. Je dünner eine Saite ist, desto mehr liegen die entstehenden Partialtöne (manchmal auch „Eigenfrequenzen“ genannt) bei den theoretischen Werten (ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz). Bei dickeren Saiten macht sich jedoch die sogenannte „Biegesteifigkeit“ bemerkbar. Dies bewirkt, dass die Eigenfrequenzen einer realen schwingenden Saite nicht bei den ganzzahligen Vielfachen des tiefsten Partialtones liegen. Bei dickeren Saiten ergeben sich deshalb sogenannte Inharmonizitäten, die die Lage der Obertöne im Frequenzspektrum verschieben. Inharmonizitäten im Spektrum der Saitenschwingungen prägen ganz wesentlich den typischen Klang eines Klaviers. In der Literatur wird die Berechnung inharmonischer Frequenzverschiebung durch Näherungen angegeben. (hierbei ist b der sogenannte Inharmonizitätskoeffizient):¹⁰

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho}} \sqrt{1 + n^2 b}, \quad \text{wobei } b = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{d}{l}\right)^2 \frac{E}{P}$$

(P : Saitenspannung, d : Durchmesser, l : Saitenlänge)

Die relative Frequenzverschiebung der n -ten Partialschwingung wird in der Literatur mit

$$\varepsilon_n = \frac{f_n - n f_1}{n f_1} \text{ angegeben}^{11}$$

¹⁰ Die Herleitung der Formeln zur Berechnung der Inharmonizitäten ist entnommen aus:

H. Fletcher, E. D. (1962). Quality of piano tones. *J. Acoust. Soc. Am*, 34

¹¹ Ebenda

Da unter Musikern gerne die Einheit „Cent“ verwendet wird (ein Cent ist der hundertste Teil eines Halbtones) existiert auch eine mehr unter musikalischen Gesichtspunkten zu verwendende Formel, die den Begriff der Inharmonizität der n-ten Teiltöne numerisch erfasst

(die Funktion „ld“ bezeichnet den Logarithmus zur Basis 2:

$$\delta_n = 1200 \cdot \text{ld}\left(\frac{f_n}{nf_1}\right)^{12}$$

Rechenbeispiel (Grundton etwa bei E4, 8.ter Partialton etwa bei E7):

Ordnung des Partialtones $n = 8$ (drei Oktaven höher), Querschnitt $d = 1\text{ mm}$,

Massendichte $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, Zugkraft $Q = 1 \text{ kN}$, Saitenlänge $l = 0.6 \text{ m}$, Ordnung

$n = 1$, Elastizitätsmodul $E = 2.1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Daraus ergibt sich:

$$P = \frac{Q}{q} = \frac{1000}{(0.5 \cdot 10^{-3})^2 \pi} = 1.27324 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2};$$

$$b = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{0.001}{0.6}\right)^2 \frac{2.1 \cdot 10^{11}}{1.27324 \cdot 10^9} = 1.71347 \cdot 10^{-6} \cdot 164.9336 = 2.82609 \cdot 10^{-4}$$

$$f_{8,harm} = \frac{8}{1.2} \sqrt{\frac{1.27324 \cdot 10^9}{7.8 \cdot 10^3}} = 8 \cdot 336,687 \text{ Hz} = 2693.497 \text{ Hz} \quad (8. \text{ Partialton ohne}$$

Inharmonizitäten)

$$f_8 = \frac{8}{1.2} \sqrt{\frac{1.27324 \cdot 10^9}{7.8 \cdot 10^3}} \cdot \sqrt{1 + 64 \cdot 2.82609 \cdot 10^{-4}} = 2742.214 \text{ Hz} \quad (\text{entspr. ungefähr}$$

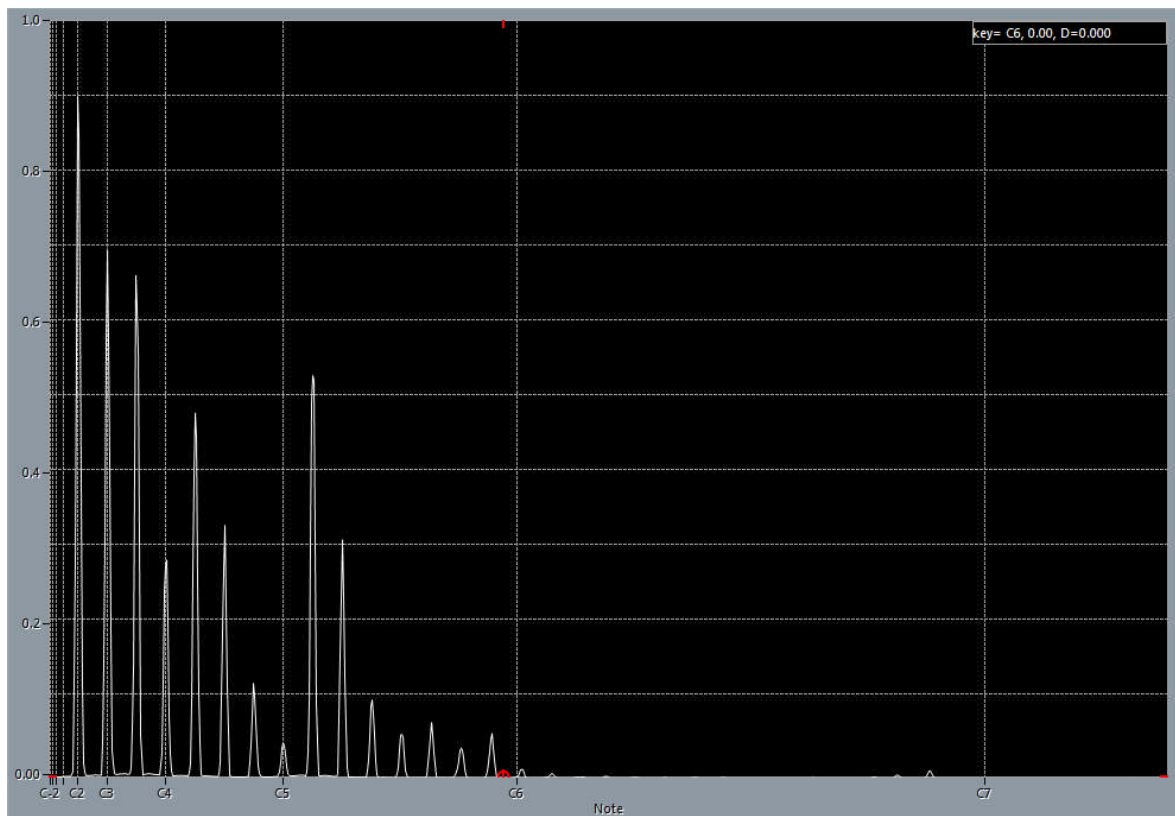
dem Ton E7)

$$\delta_n = 1200 \cdot \text{ld}\left(\frac{2742.214}{2693.497}\right) \text{ Cent} = 1200 \cdot \text{ld}(1.018087) = 31.03 \text{ Cent}$$

Eine Folge dieser Verschiebung der Partialtonfrequenzen nach oben ist die Anwendung der gespreizten Stimmung beim Klavier. Dadurch, dass die hohen Töne etwas höher gestimmt werden, fallen die höheren Partialtonfrequenzen der Töne aus der mittleren Lage besser mit den etwas höher gestimmten Tönen zusammen, so dass dadurch keine unangenehmen Schwebungen oder Dissonanzen entstehen können.

¹²H. Fletcher, E. D. (1962). Quality of piano tones. *J. Acoust. Soc. Am*, 34

ABBILDUNG 7



Der gemessene sechste Oberton liegt geringfügig über dem theoretischen Wert (in der Abbildung als C6 beschriftet). Dies liegt an der Inharmonizität der Saite.¹³

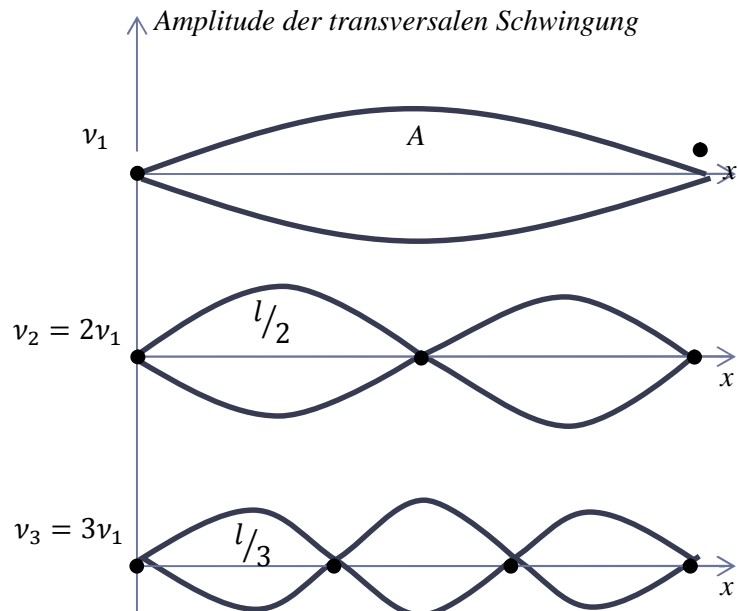
¹³ Das Frequenzspektrum wurde mittels der Software Cubase erstellt

3.1. PHYSIKALISCHE INTERPRETATION DER LÖSUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNG¹⁴

Der n-te Term in der allgemeinen Lösung, d.h. $C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin(2\pi\nu_n t + \gamma_n)$ beschreibt eine stehende Welle mit den Schwingungsknoten bei $0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{nl}{n}$. Aus der zeitlich veränderlichen Amplitude mit dem Maximalwert $C_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ erkennt man, dass die Saite an diesen Knoten zu allen Zeiten in Ruhe ist. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Knoten beträgt jeweils eine halbe Wellenlänge. Es ist klar, dass in einer schwingenden Saite nur stehende Wellen auftreten können, wenn die Saitenlänge ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist (siehe Skizze).

Für $n = 1$ erhalten wir die Grundfrequenz der schwingenden Saite (hier für die Longitudinal- und die Transversalschwingungen):

$$\nu_{1, long} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [Hz]}$$

$$\nu_{1, tr} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho}} \text{ [Hz]} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Q}{q\rho}} \text{ [Hz]}$$


Für $n > 1$ erhalten wir die sogenannten harmonischen Obertöne (Oberschwingungen) mit den Frequenzen $\nu_n = n\nu_1$. Im realen Fall (z. Bsp. einer schwingenden Klaviersaite) werden sich sehr viele dieser einzelnen Schwingungszustände überlagern und die entstehende Form der Saite wird sehr kompliziert sein.

¹⁴ Die Herleitung und Lösung der Schwingungsgleichungen einer eingespannten Saite, findet sich im Anhang

Die Amplituden des Schwingungsspektrums entsprechen den Konstanten C_n . Die zu hörende Klangfarbe hängt sehr stark von der Anzahl und dem Verhältnis dieser Amplituden untereinander ab. Außerdem hängen die C_n ebenfalls sehr stark von den Anfangsbedingungen (der Art und Weise wie die Saite angeregt wird, z Bsp. mit einem Hammer in der Mitte oder am Rand, oder „angezupft“...). Dies ist einleuchtend, da jedem Musiker bekannt ist, dass der Klang sehr stark variieren kann, je nach dem an welchem Ort der Saite die Saite angeschlagen oder angeregt wird. Die wahrgenommene Tonhöhe wird in der Regel vom Grundton dominiert werden.

Rechenbeispiel:

Eine Klaviersaite wird von einem Hammer der Breite b in der Saitenmitte mit der Geschwindigkeit V_0 angeschlagen:

Die beiden Funktionen $F(x)$ und $G(x)$, die die Anfangsbedingungen festlegen lauten in diesem Fall:

$$F(x) = u(x, t = 0) = 0 \quad G(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x,t=0} = \begin{cases} V_0, & \frac{l-b}{2} \leq x \leq \frac{l+b}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt: $a_n = 0$, für alle n (siehe. Gleichung 12a im Anhang)

$$b_n = \frac{1}{\pi l v_n} \int_{l-\frac{b}{2}}^{l+\frac{b}{2}} V_0 \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{V_0}{n\pi^2 v_n} \left[\cos \frac{n\pi(l-b)}{2l} - \cos \frac{n\pi(l+b)}{2l} \right], \quad (\text{und nach kurzer}$$

Umformung:)

$$b_n = \frac{2V_0}{n\pi^2 v_n} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi b}{2l}$$

Wie man sieht, entstehen in diesem Fall nur ungeradzahlige harmonische Obertöne, da $\sin \frac{n\pi}{2}$ für gerade n verschwindet.

$$\text{Mit } v_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho}} \text{ ergibt sich also: } C_n = |b_n| = \begin{cases} \frac{4lV_0}{n^2\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{P}} \sin \frac{n\pi b}{2l}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Amplitude

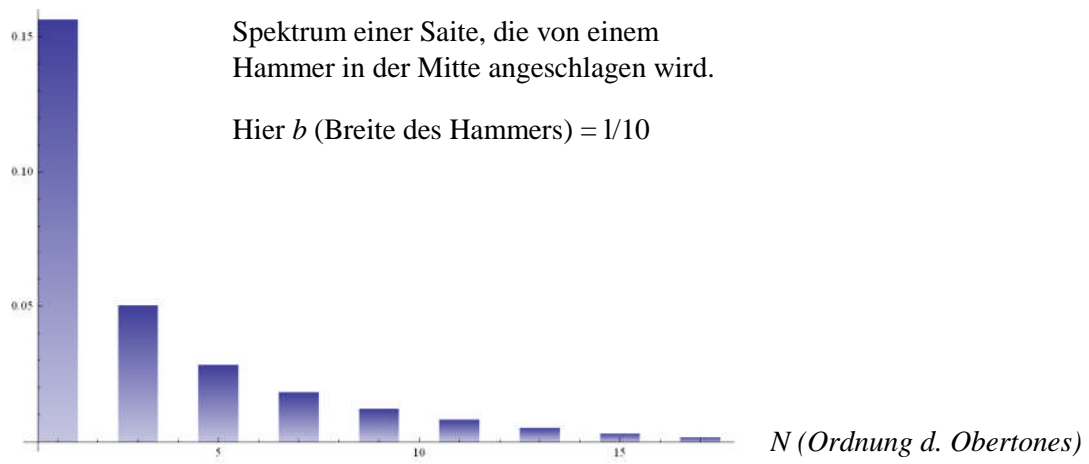


ABBILDUNG 8

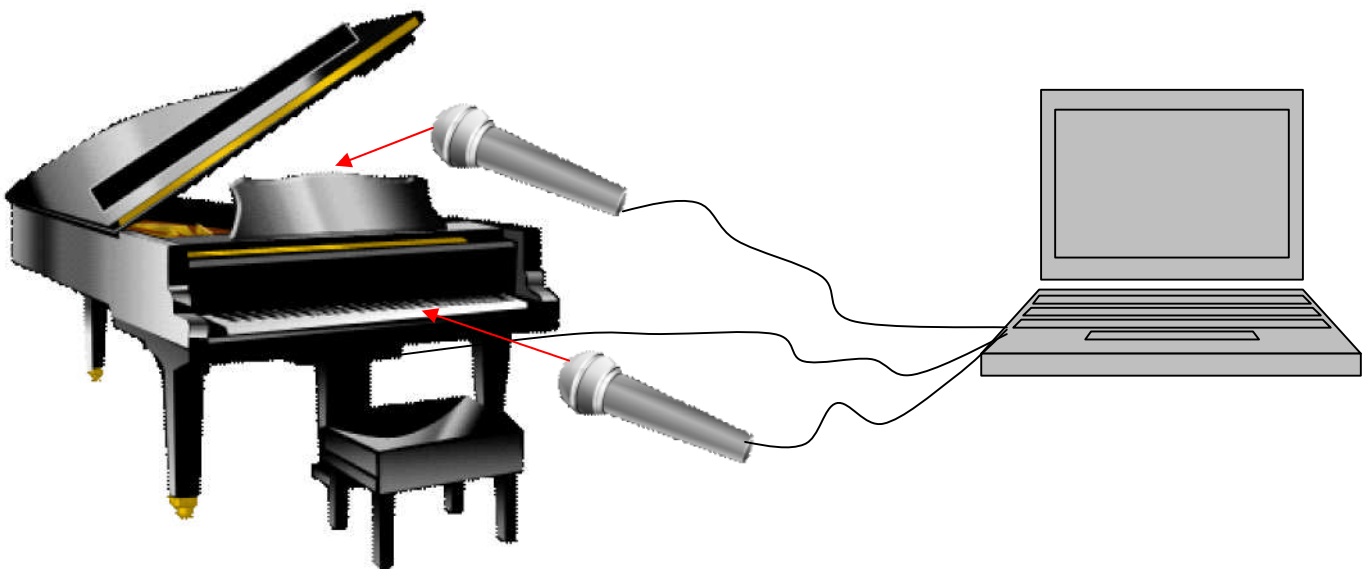
4. DIE TESTREIHEN

Um das Phänomen Klangfarbe und Tastengeräusch genauer zu untersuchen, wurden verschiedene Testreihen mit Messungen durchgeführt. Es wurde eine Vielzahl von Samples (je Klavierton) aufgenommen um diese dann digital zu analysieren, auszuwerten und zu vergleichen¹⁵:

Die Messungen wurden an einem Flügel der Marke Kawai (Modell GE-30 ATX Anytime EP) durchgeführt. Zusätzlich zu Eigenschaften eines akustischen Flügels besitzt dieser Flügel eine *midifizierte* Mechanik, d.h. die Anschlagsstärke des Hammers kann über eine MIDI-Schnittstelle von einem Computer aufgezeichnet werden. Es besteht auch die Möglichkeit, die Hammermechanik von den Saiten abzukoppeln. Diese Eigenschaft wurde benutzt, um die reinen Anschlagsgeräusche (ohne Saitenklang) aufzuzeichnen. Die Art der Tastenerkennung (die für den elektronischen Klang und die MIDI-Erfassung erforderlich ist) erfolgt über optische Sensoren.¹⁶

Für die Tonaufnahme wurde ein empfindliches Mikrofon verwendet, dass jeweils aus ca. 20 cm Entfernung auf die entsprechende Schallquelle gerichtet wurde.

Skizze vom Versuchsaufbau:



¹⁵ Alle dargestellten Spektrogramme sind als Hörbeispiele auf der beigelegten CD verfügbar (siehe Trackliste im Anhang)

¹⁶ Der Flügel, so wie die Räumlichkeiten, wurden vom Musikhaus Hieber Lindberg in München freundlicherweise zur Verfügung gestellt

Die Anschlagstärke wurde dabei als MIDI-Wert ¹⁷ (0-127) aufgezeichnet. Zur Auswertung werden jeweils die Spektrogramme betrachtet. Es wurden Daten für folgende Klaviertöne erfasst (jeweils in Abhängigkeit verschiedener Anschlagstärken und Anschlagsart):

- Großes C
- Kleines C
- Eingestrichenes C
- Zweigestrichenes C
- Dreigestrichenes C
- Tastengeräusch (oberes und unteres)

Die Taste wurde jeweils auf zwei verschiedene Weisen angeschlagen: Einmal „aus der Luft“ (vor dem Anschlag bestand kein Kontakt zur Taste) und einmal „von der Taste“ (d. h. vor dem Niederdrücken der Taste bestand bereits der Kontakt zwischen Finger und Taste. Durch diese Art des Anschlags kann das „obere“ Tastengeräusch vermieden werden und somit das untere Geräusch isoliert werden).

Die Ergebnisse wurden unter Einbezug folgender Fragen ausgewertet:

Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Saitenklanges in Abhängigkeit der Anschlagstärke? (bei gleichbleibender Tonhöhe)

Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Saitenklanges in Abhängigkeit der Tonhöhe? (bei gleichbleibender Anschlagstärke)

Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Tastengeräusches in Abhängigkeit der Anschlagstärke? (Untersuchung beider Anschlagsarten)

Wie verändert sich das Frequenzspektrum des Tastengeräusches in Abhängigkeit der Anschlagsart?

¹⁷ Der MIDI-Wert liefert einen relativen Wert (zwischen 0 und 127) über die Geschwindigkeit des Anschlags. Erfasst wird der Wert im Normalfall optisch durch eine Lichtschranke in der Mechanik.

4.1. WIE VERÄNDERT SICH DAS FREQUENZSPEKTRUM DES SAITENKLANGES IN ABHÄNGIGKEIT DER ANSCHLAGSSTÄRKE BEI GLEICHBLEIBENDER TONHÖHE?
(AM BEISPIEL DER TÖNE „KLEINES C“ UND „C3“)

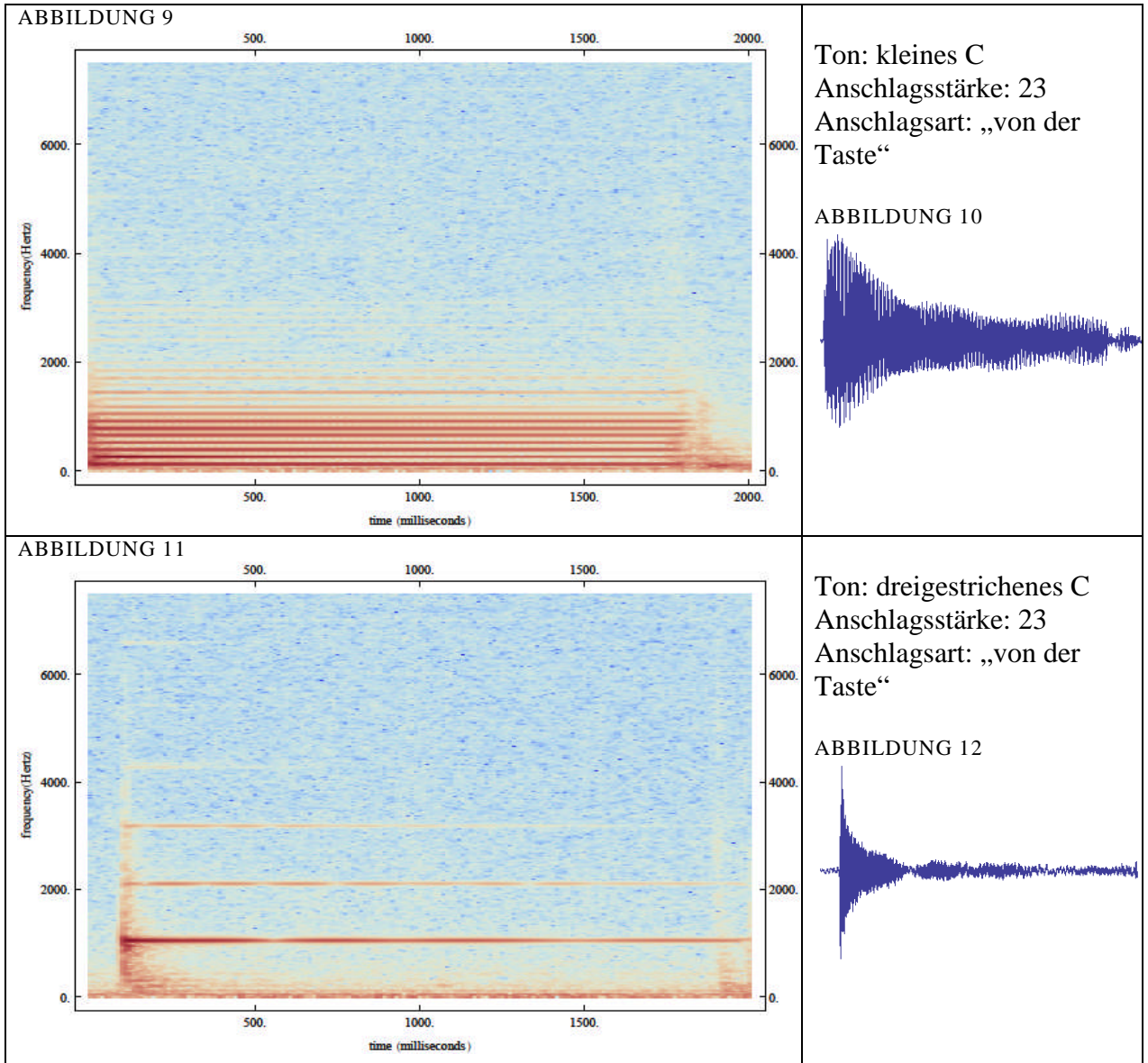
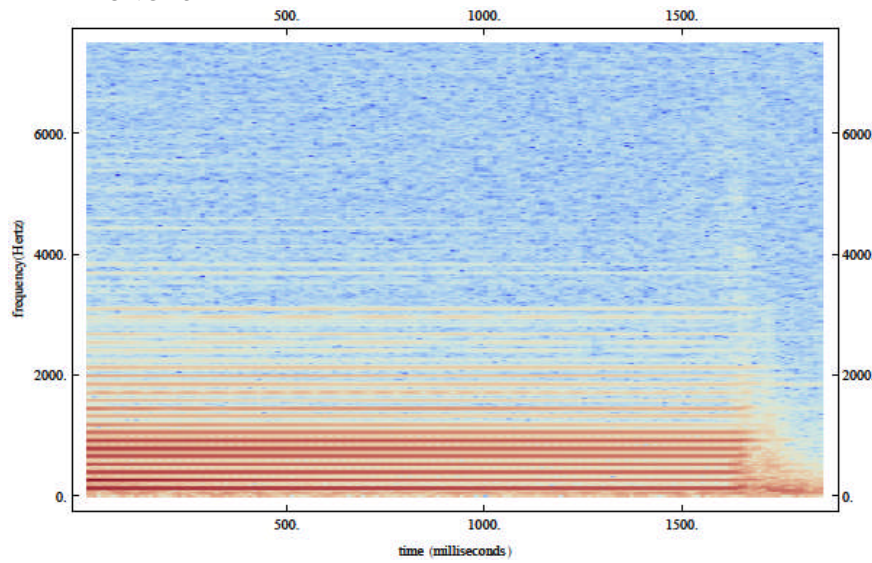


ABBILDUNG 13



Ton: kleines C
Anschlagsstärke: 41
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 14

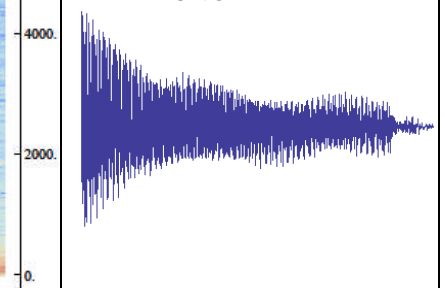
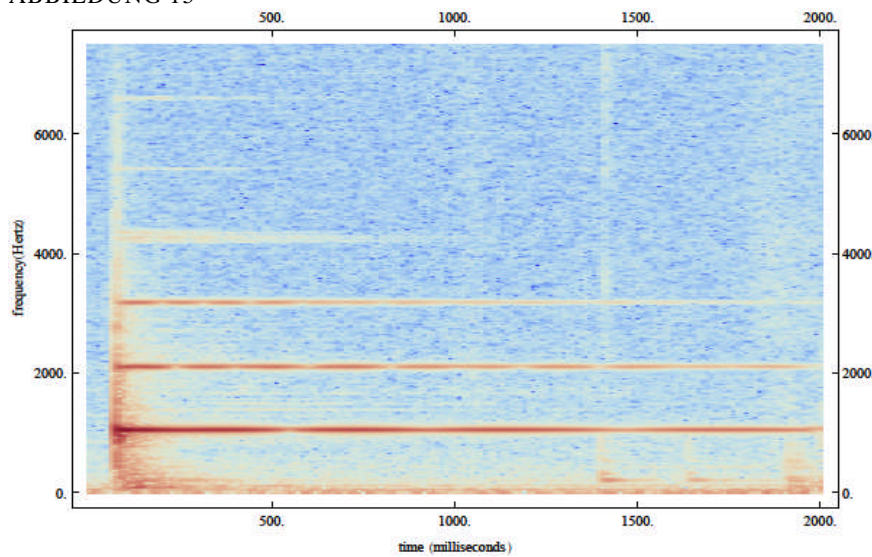


ABBILDUNG 15



Ton: dreigestrichenes C
Anschlagsstärke: 41
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 16

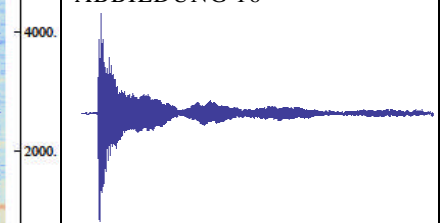
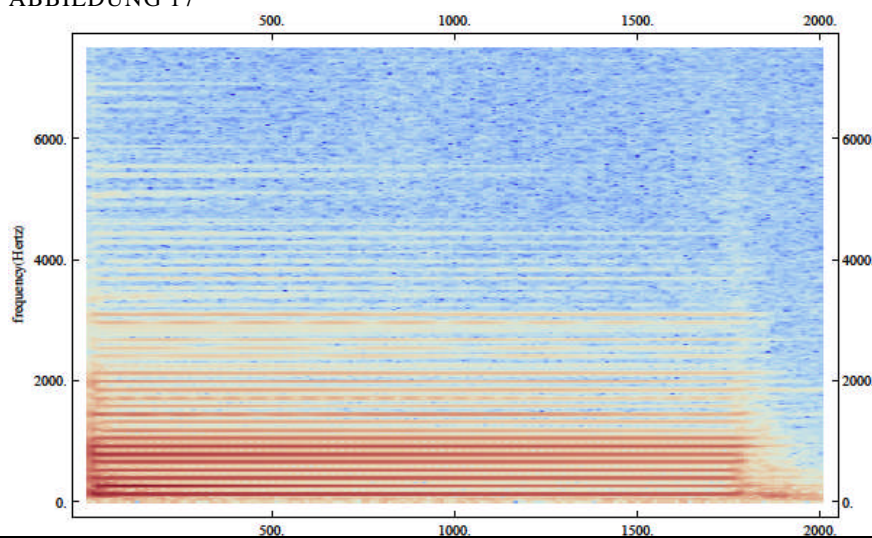


ABBILDUNG 17



Ton: kleines C
Anschlagsstärke: 50
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 18

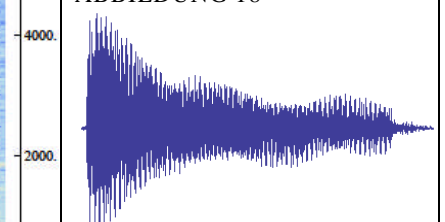
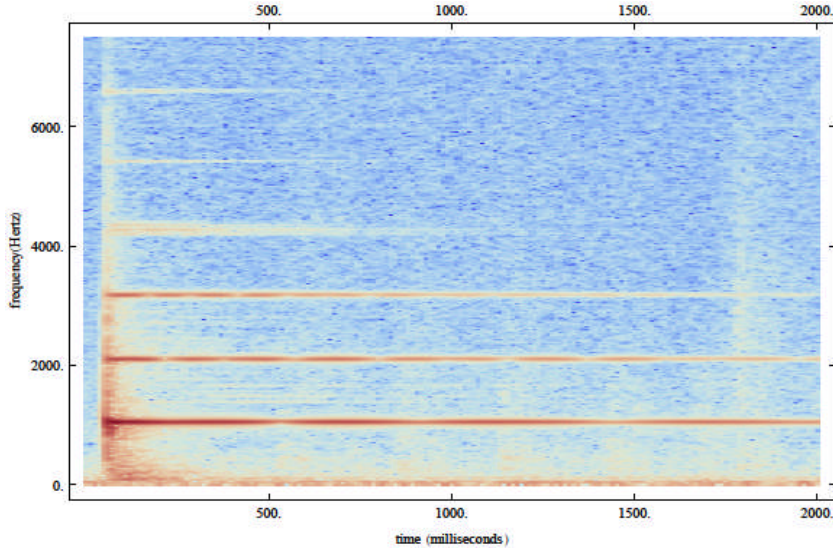


ABBILDUNG 19

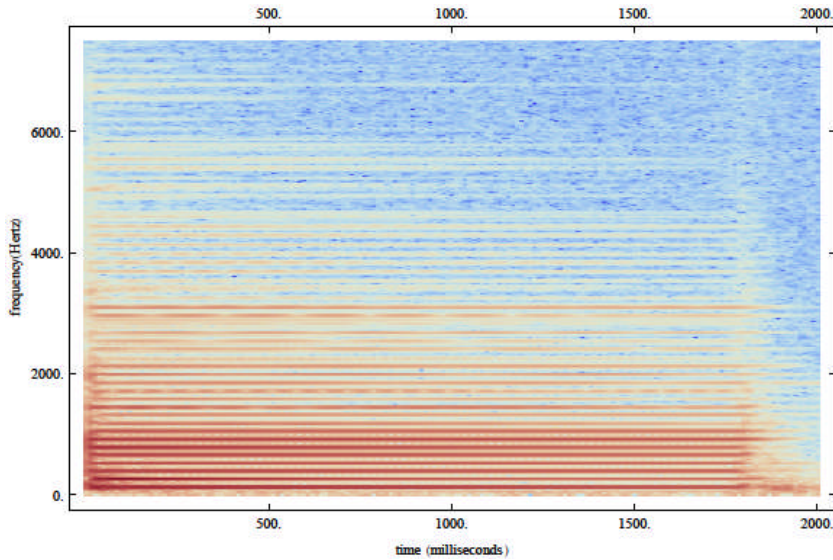


Ton: dreigestrichenes C
Anschlagsstärke: 50
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 20



ABBILDUNG 21



Ton: kleines C
Anschlagsstärke: 83
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 22

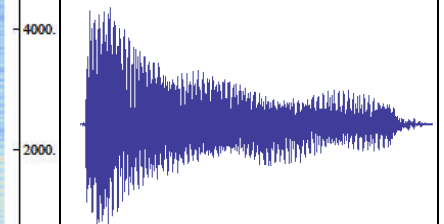
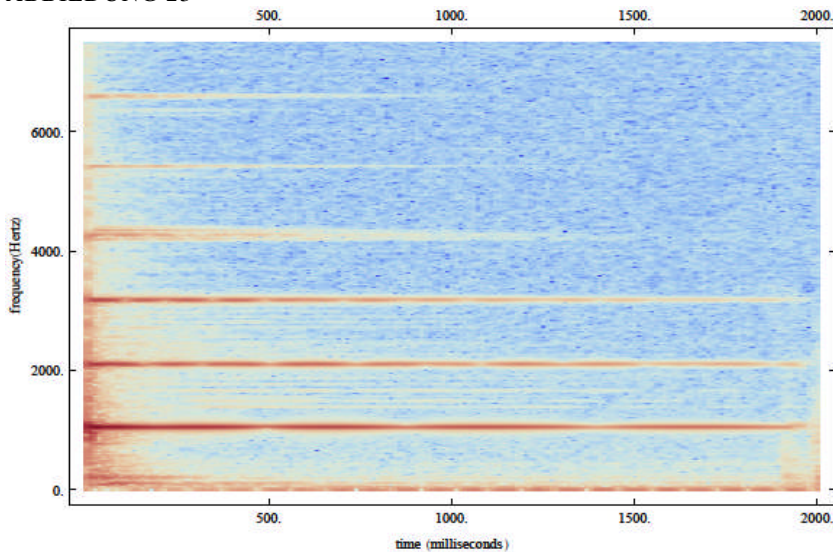


ABBILDUNG 23

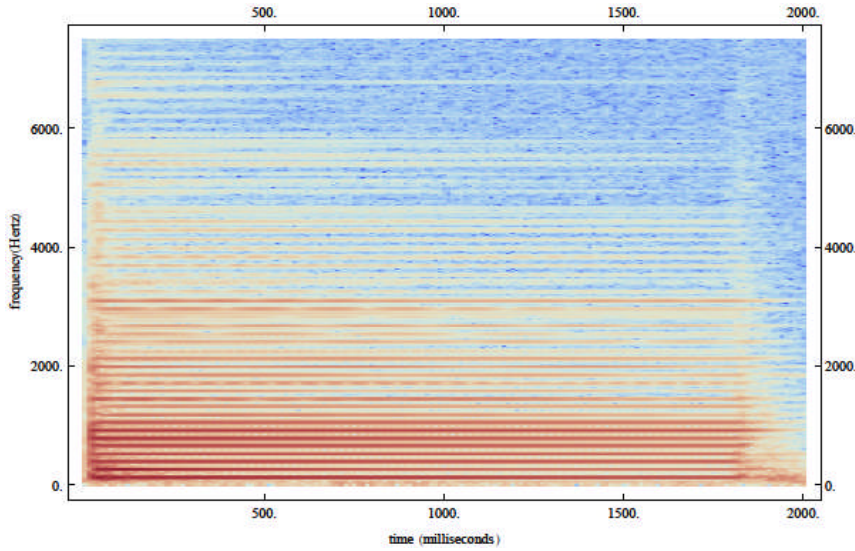


Ton: dreigestrichenes C
Anschlagsstärke: 83
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 24



ABBILDUNG 25



Ton: kleines C
Anschlagsstärke: 90
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 26

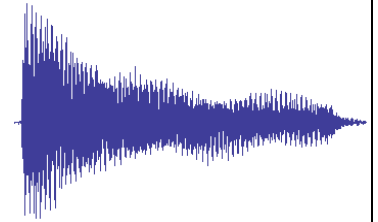
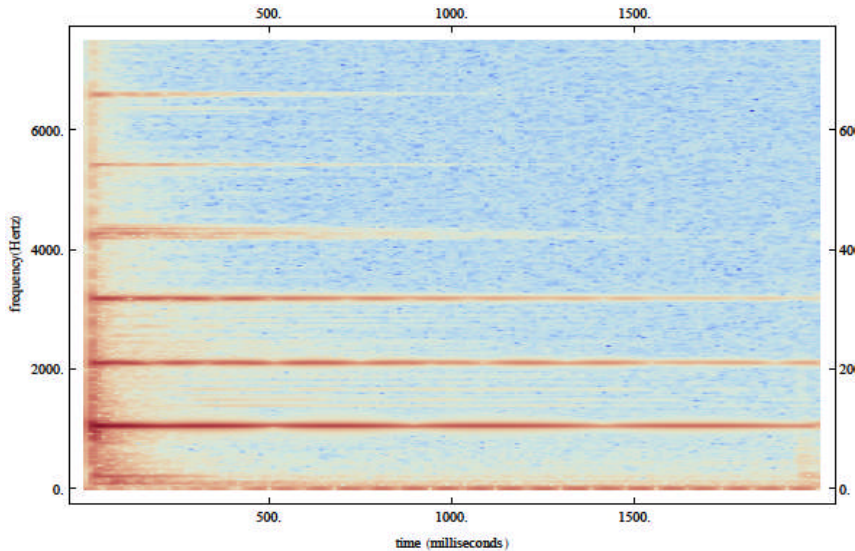


ABBILDUNG 27

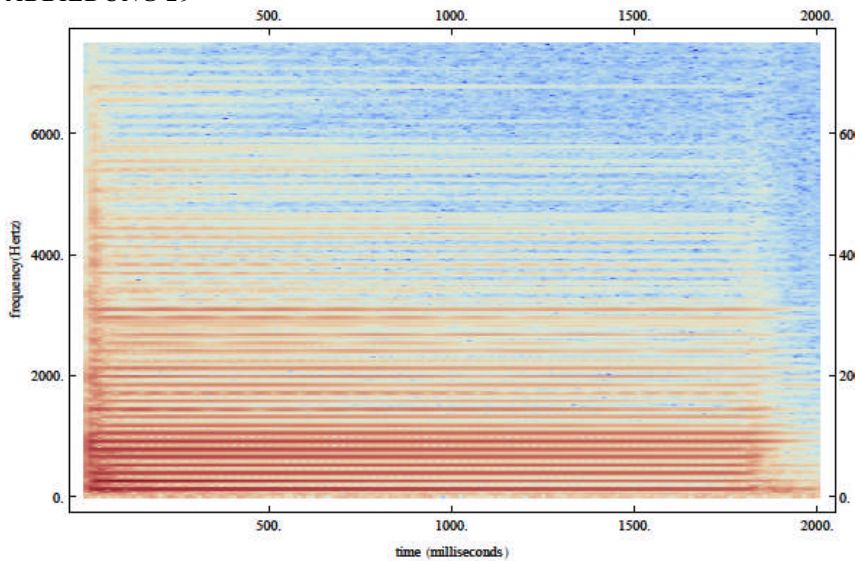


Ton: dreigestrichenes C
Anschlagsstärke: 90
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 28

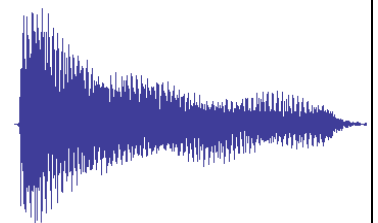


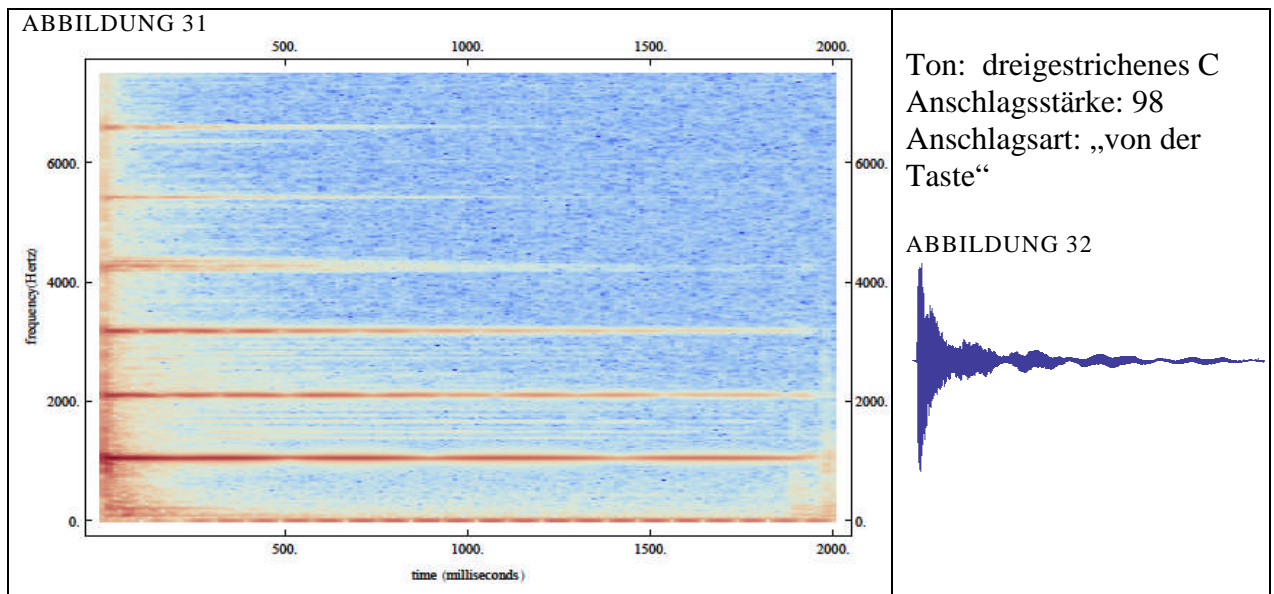
ABBILDUNG 29



Ton: kleines C
Anschlagsstärke: 98
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 30





Nach rechts entlang der X-Achse ist die Zeit dargestellt, nach oben entlang der Y-Achse die Frequenz. Die Frequenzdarstellung reicht bis circa 8000 Herz¹⁸, die Tonintensität ist farblich gekennzeichnet (Je dichter und dunkler die Färbung, desto präsenter jeweilige Frequenz). Zusätzlich ist jeder Spalte noch die Abbildung der jeweiligen Schallwelle beigefügt.

Die vorangehenden Darstellungen, zeigen wie sich das Frequenzspektrum in Abhängigkeit der Tonhöhe verändert.

Zunächst ist ein klarer Zusammenhang zwischen Anschlagsstärke und Obertongehalt zu erkennen, die Intensität der der Teiltöne, sowie auch deren Dauer, wächst mit der Anschlagsstärke.

Desweiteren ist ein beträchtlicher Unterschied zwischen den beiden Beispieltönen auszumachen. Vergleicht man die Spektrogramme beider Töne einer Anschlagsstärke, so ist deutlich zu erkennen, dass beim Anschlag des tieferen Tons („kleines C“) im Vergleich zum höheren („dreigestrichenes C“) durchgehend mehr Nebenfrequenzen (über der Grundfrequenz) entstehen. Außerdem scheinen diese beständiger zu sein. Vergleicht man beispielsweise Abbildung 1 und Abbildung 3 (also Anschlagsstärke 23),

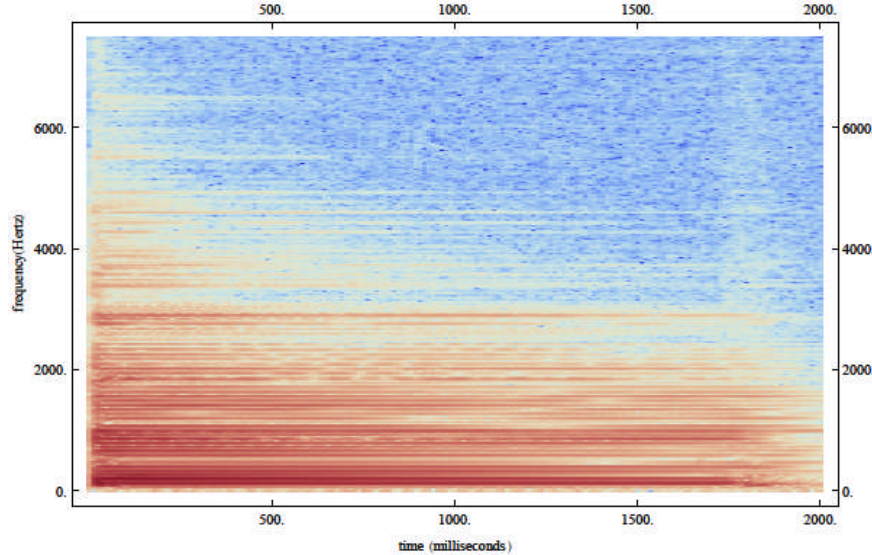
¹⁸Die 8000 Hz kennzeichnen den Hörbereich der noch problemlos hörbar ist. Die Teiltöne mit einer höheren Frequenz können zwar so nicht mehr dargestellt werden; diese sind aber auch nicht zwingend relevant, da sie nur schwer oder gar nicht wahrgenommen werden.

erkennt man, dass in Abbildung 1 („kleines C“) die Frequenzen der nächsten 10 Teiltöne bereits vollständig (bis zum Dämpfen) vorhanden sind, wohingegen in Abbildung 2 („dreigestrichenes C“) nur der zweite und dritte Teilton deutlich sichtbar sind (die höheren Teiltöne sind allerdings zu erahnen). Außerdem fällt die Intensität der Grundschwingung, sowie die der Teiltöne zum Ende hin ab. Natürlich verlieren auch die Frequenzen des tieferen Tones („kleines C“) an Intensität, jedoch in sehr viel geringerem Ausmaß. Der Grund hierfür ist, dass höhere Frequenzen durch die Luft schneller abgedämpft werden, sowie die Länge und Masse der Saite (die in den höheren Lagen natürlich deutlich geringer ausfallen und ein schnelleres Ausschwingen bewirken).

Grundsätzlich lässt sich also festhalten, dass die Intensität der Grund- und Teilschwingungen, sowie deren Dauer, vom Anschlag abhängig sind. Höhere Frequenzen verklingen außerdem deutlich schneller als niedrigere, wobei die Amplituden kurz nach dem Anschlag noch vergleichbar groß sind.

4.2. WIE VERÄNDERT SICH DAS FREQUENZSPEKTRUM DES SAITENKLANGES IN ABHÄNGIGKEIT DER TONHÖHE (BEI GLEICHBLEIBENDER ANSCHLAGSSTÄRKE)?

ABBILDUNG 33



Ton: großes C
Frequenz: 65,4064 Hz
Anschlagsstärke: 75
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 34

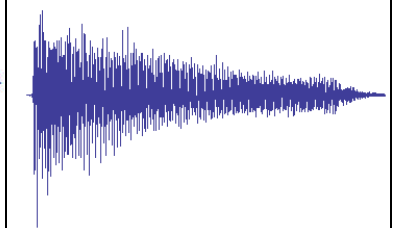
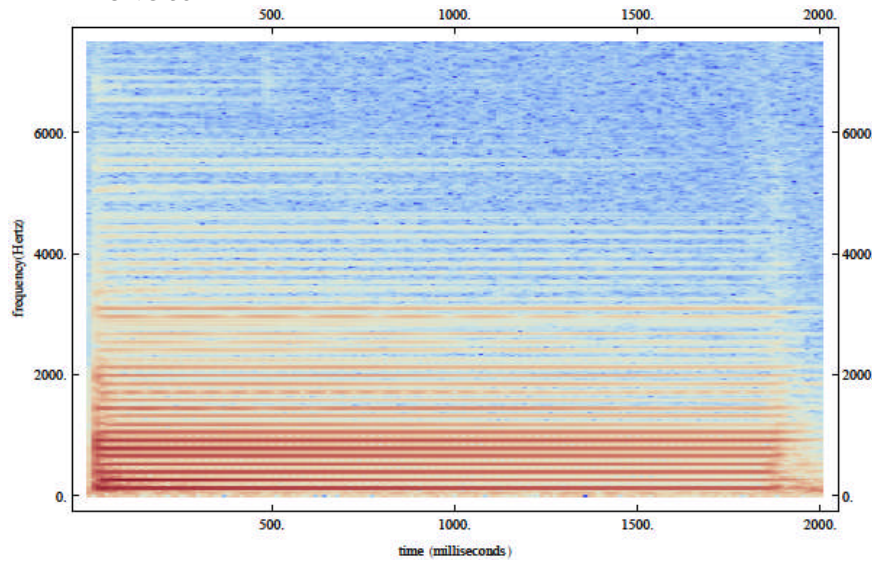


ABBILDUNG 35



Ton: kleines C
Frequenz: 130,813 Hz
Anschlagsstärke: 75
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 36

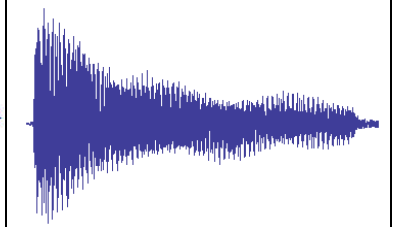
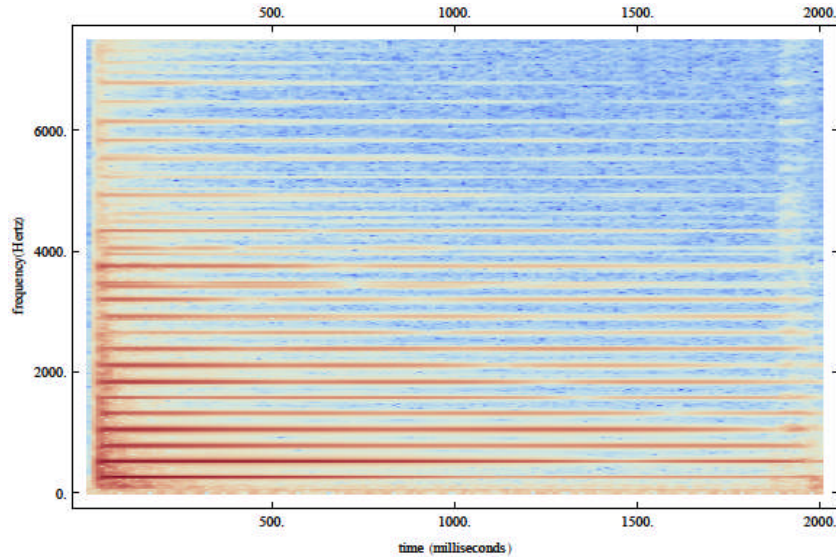


ABBILDUNG 37



Ton: eingestrichenes C
Frequenz: 261,626 Hz
Anschlagsstärke: 75
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 38

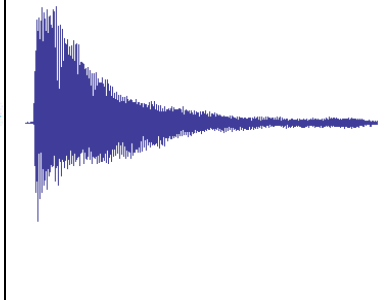
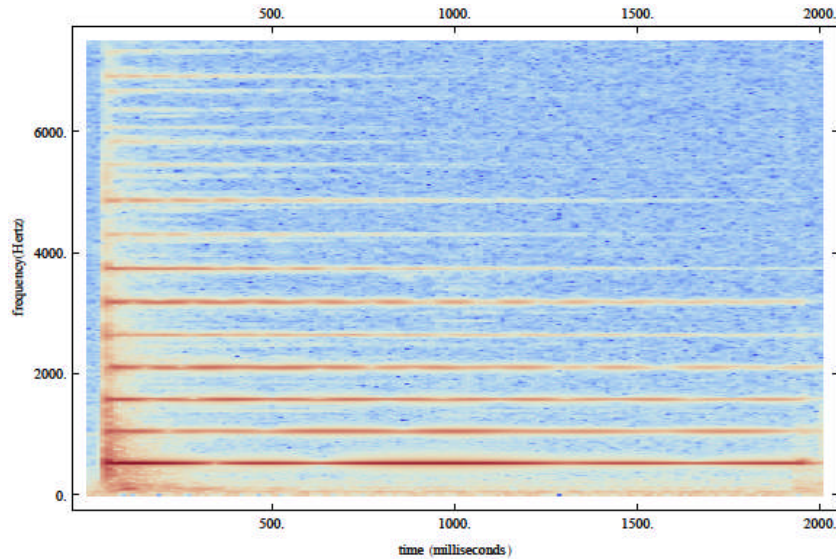


ABBILDUNG 39



Ton: zweigestrichenes C
Frequenz: 523,251 Hz
Anschlagsstärke: 75
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 40

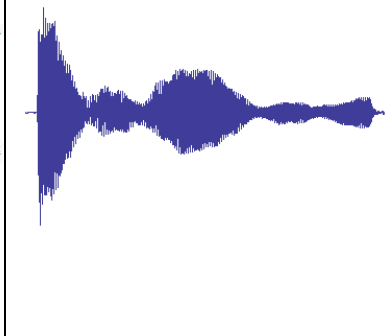
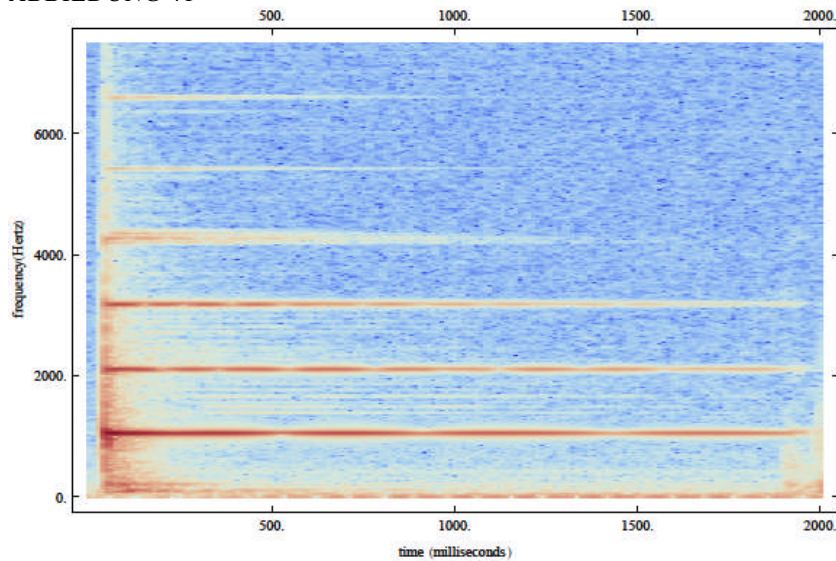
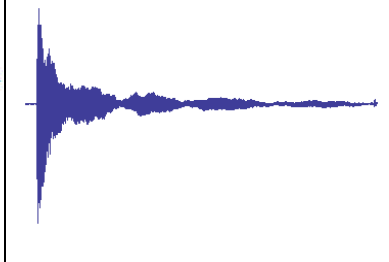


ABBILDUNG 41



Ton: dreigestrichenes C
Grundfrequenz: 1046,50 Hz
Anschlagsstärke: 75
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 42



Die Spektrogramme zeigen deutlich die Verteilung der Teiltöne der jeweiligen Grundschwingung.

Man kann hier deutlich erkennen, dass die Dichte der erzeugten Frequenzen bei den tiefen Tönen sehr viel höher ist. Das liegt nicht etwa daran, dass diese mehr Obertöne besitzt. Vielmehr wird hier veranschaulicht, dass deutlich mehr Teiltöne in unserem Hörbereich liegen. Beim „großen C“ liegen im Bereich bis 2000 Hz bereits die ersten 30 Teiltöne, beim „dreigestrichenen C“ ist bereits der zehnte Teilton vom menschlichen Ohr so gut wie nicht mehr erfassbar. Auch geht aus den Graphiken hervor, dass tiefe Frequenzen im Gegensatz zu den höheren deutlich stärker angeregt und langsamer abgeschwächt werden. In tiefen Lagen werden von Anfang an sichtbar mehr Frequenzen angeregt wobei sich bis zur endgültigen Abdämpfung der Saite so gut wie kein Intensitätsverlust zeigt (vgl. Abbildung 1, 2). In den höheren Lagen fällt die Intensität deutlich schneller ab, was auch daran liegt, dass höhere Frequenzen in der Luft schneller abgedämpft werden. Grund hierfür sind natürlich auch die kürzeren Saitenlängen der hohen Töne, sowie deren geringere Masse.

Die Abbildung der Welle bei zweigestrichenen C zeigt einen besonderen Effekt. Der Flügel, den ich für die Testreihen herangezogen habe, war anscheinend teilweise leicht verstimmt, wie hier gut zu erkennen ist. Alle anderen Wellen, zeigen ein kontinuierliches Ausschlagen. Im Fall des zweigestrichenen Cs, verhält sich die Welle anders. Es sind deutlich unterschiedlich große Schwellungen zu erkennen (vgl. Abbildung 8). Die Lautstärke schwankt hier aufgrund von Interferenz zweier Wellen, genannt Schwebung¹⁹. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um eine absichtlich erzeugte Schwebung; Die Saite ist schlicht und einfach verstimmt.

¹⁹ Siehe Kapitel „Schwebungen“

4.3. WIE VERÄNDERT SICH DAS FREQUENZSPEKTRUM DES TASTENGERÄUSCHES
 IN ABHÄNGIGKEIT DER ANSCHLAGSSTÄRKE? (UNTERSUCHUNG BEIDER
 ANSCHLAGSARTEN)

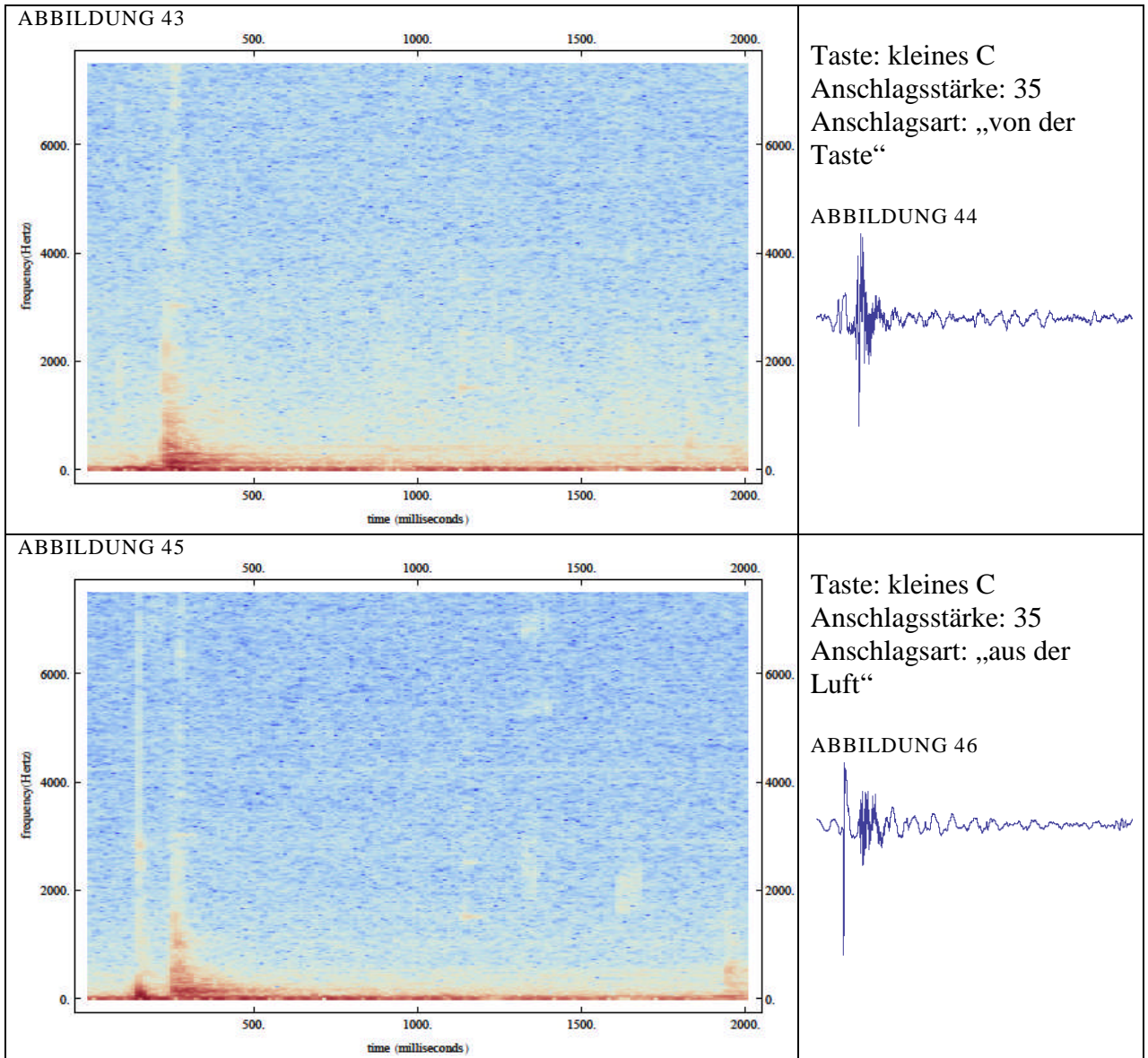
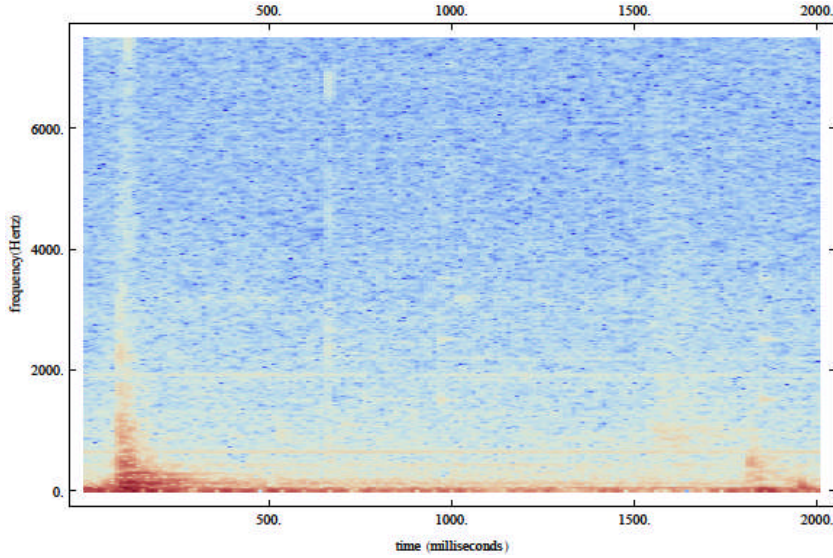


ABBILDUNG 47



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 51
Anschlagsart: „von der
Taste“

ABBILDUNG 48

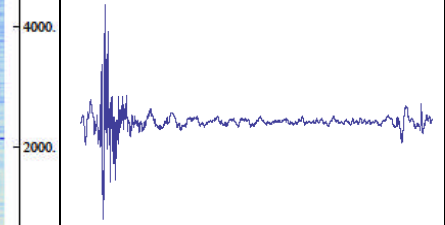
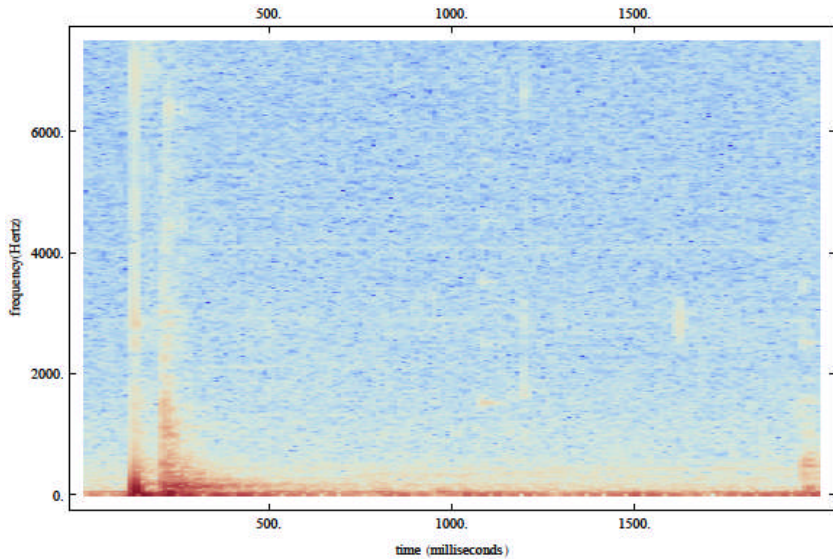


ABBILDUNG 49



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 51
Anschlagsart: „aus der
Luft“

ABBILDUNG 50

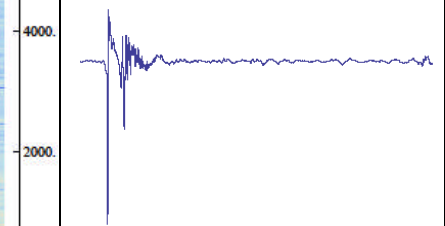
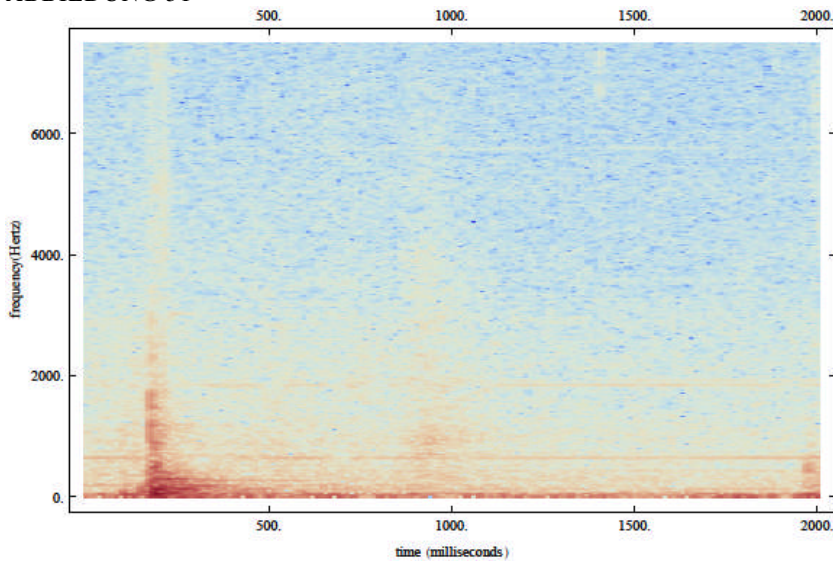


ABBILDUNG 51



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 79
Anschlagsart: „von der
Taste“

ABBILDUNG 52

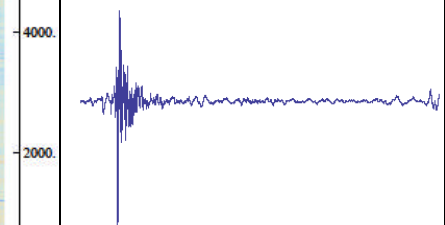
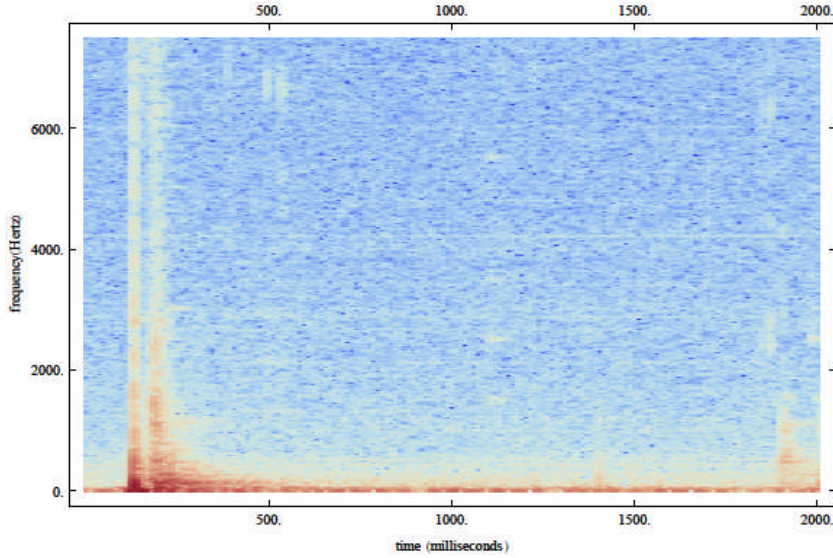


ABBILDUNG 53



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 79
Anschlagsart: „aus der Luft“

ABBILDUNG 54

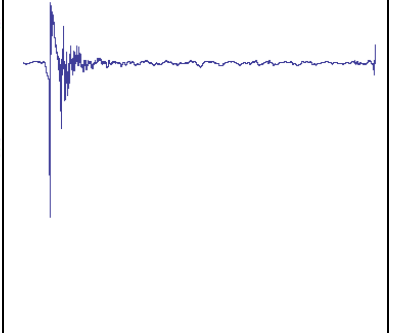
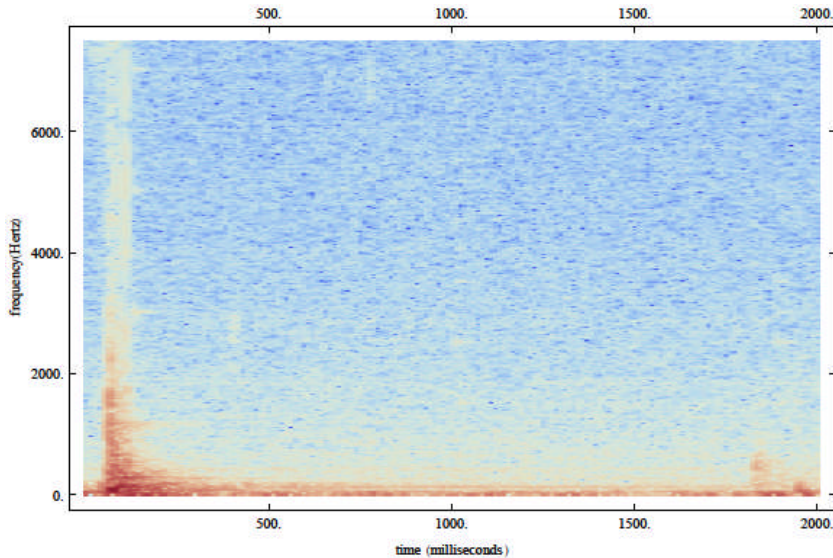


ABBILDUNG 55



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 88
Anschlagsart: „von der Taste“

ABBILDUNG 56

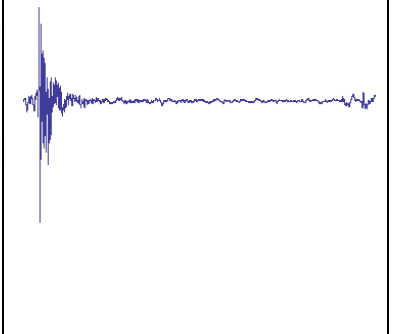
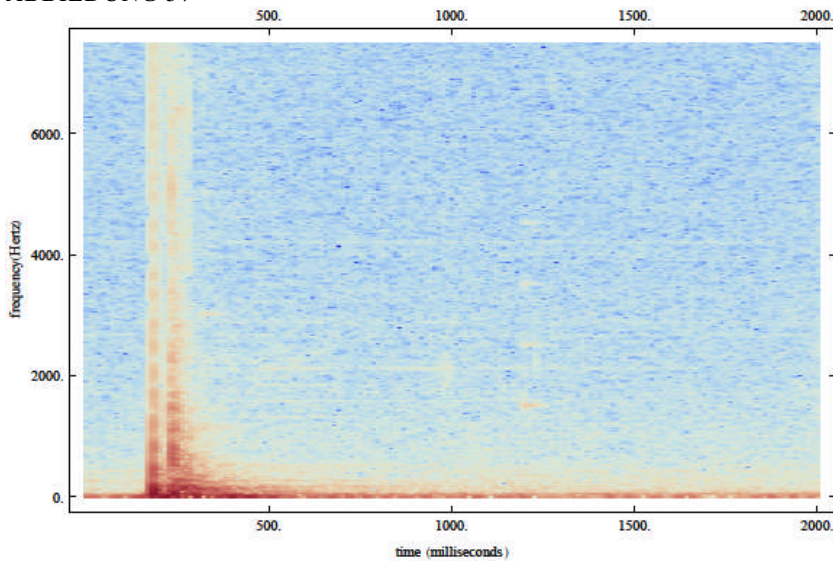


ABBILDUNG 57



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 88
Anschlagsart: „aus der Luft“

ABBILDUNG 58

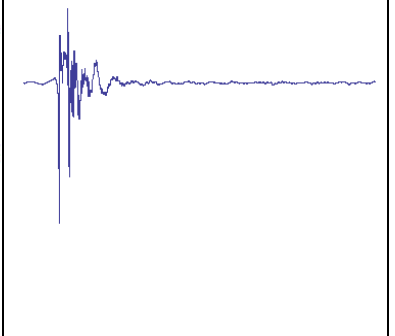
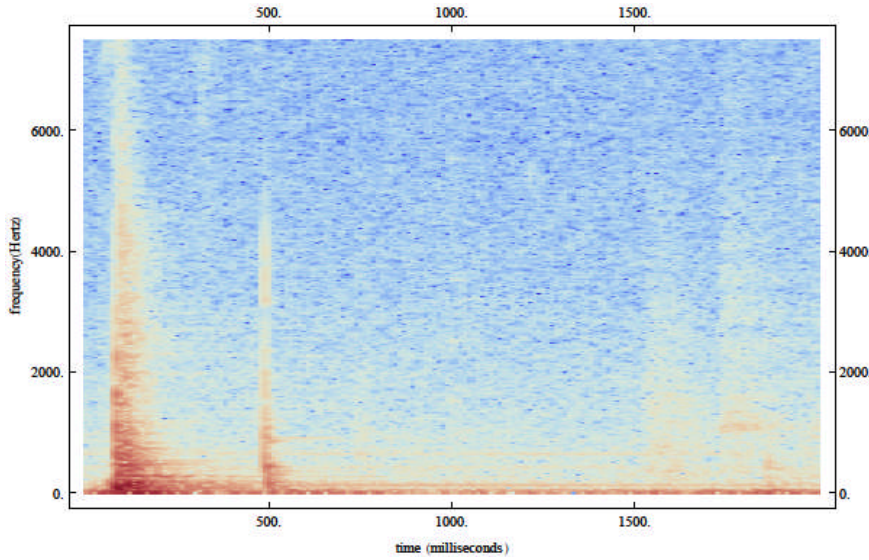


ABBILDUNG 59



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 100
Anschlagsart: „von der
Taste“

ABBILDUNG 60

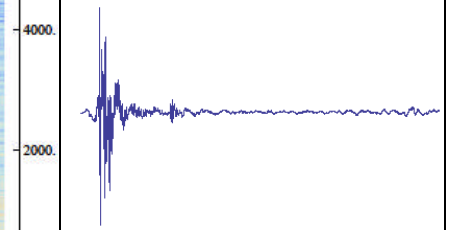
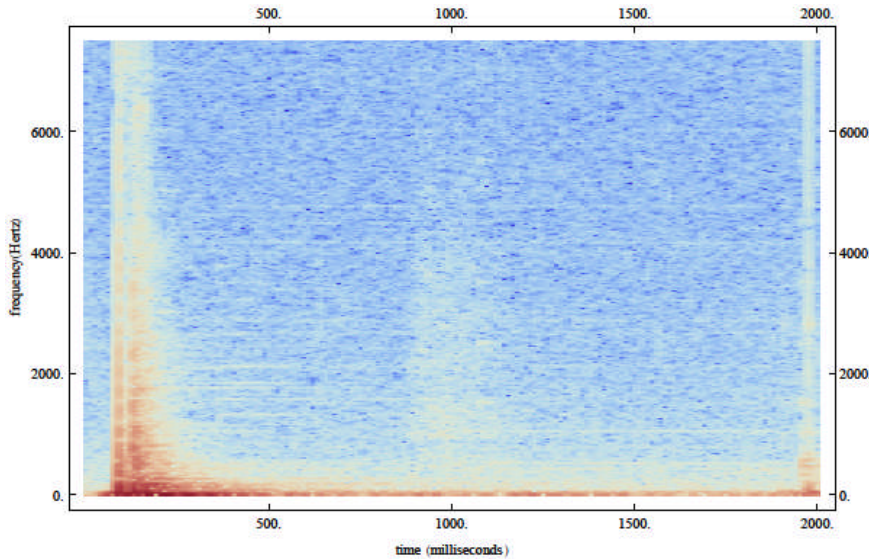


ABBILDUNG 61



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 100
Anschlagsart: „aus der
Luft“

ABBILDUNG 62

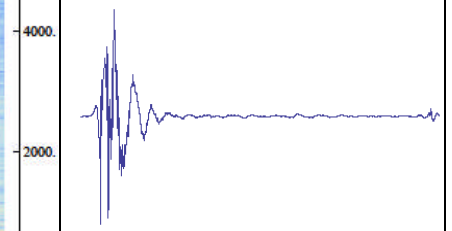
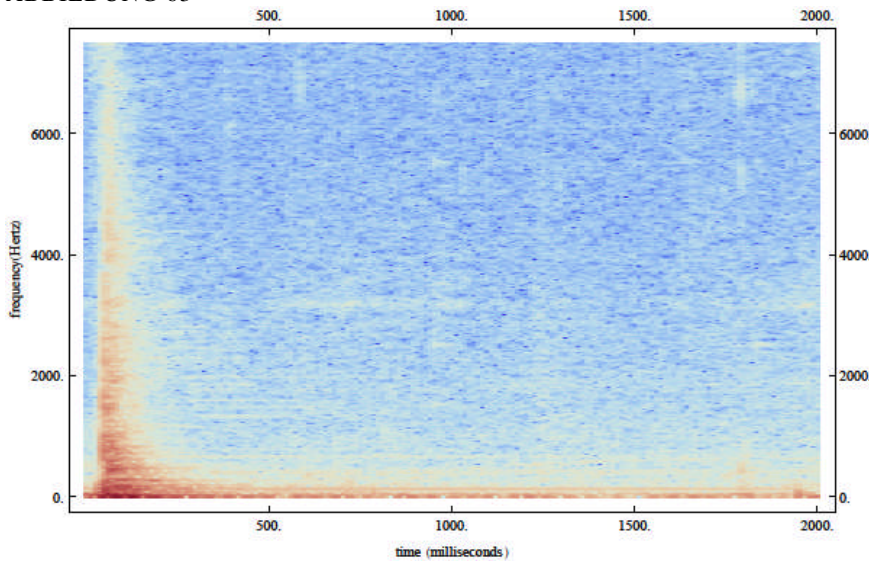
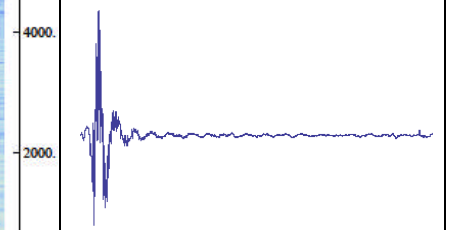


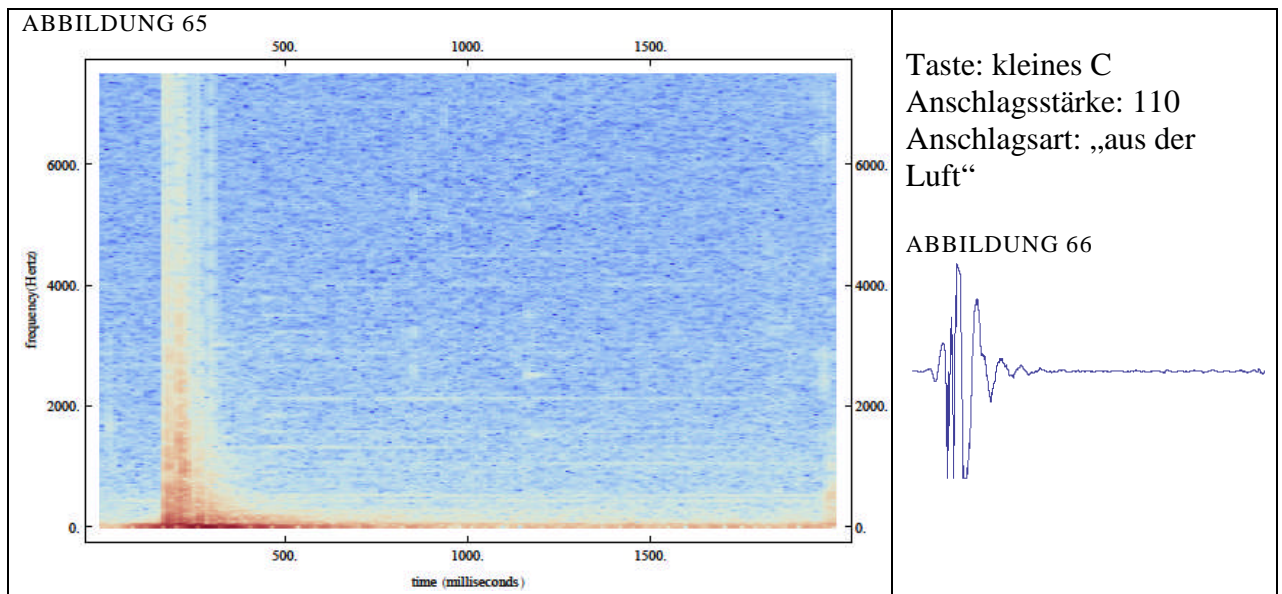
ABBILDUNG 63



Taste: kleines C
Anschlagsstärke: 110
Anschlagsart: „von der
Taste“

ABBILDUNG 64





Die vorangegangenen Graphiken sind eine Gegenüberstellung zweier Anschlagsarten.

Einmal erfolgte der Druck der Taste von der Taste, das heißt der Finger stand vor dem Anschlag bereits in direktem Kontakt zur Taste, sowie einmal aus der Luft. Die Ausgangsposition des Fingers beim Anschlag aus der Luft liegt je nach Anschlagsstärke ca. einen bis 15 cm über der Taste.

Der Unterschied der zwei verschiedenen Anschlagsarten spiegelt sich zunächst deutlich im Spektrogramm wieder (Die beiden Ausschläge sind auch der Wellengraphik zu entnehmen). Vor allem bei den schwächer angeschlagenen Tönen erkennt man beim „Anschlag aus der Luft“ eindeutig zwei Ausschläge (Vgl. Abbildung 35 - 42).

Der erste Ausschlag stellt dabei das „obere“ Tastengeräusch dar, also das Geräusch das beim Auftreffen des Fingers auf die Taste entsteht. Der zweite Ausschlag stellt das „untere“ Tastengeräusch dar, also das Geräusch, das entsteht wenn die Taste auf den Tastengrund trifft.

Weiter lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Anschlagsstärke und der Position der Ausschläge feststellen. Je fester der Anschlag ist, desto näher liegen die beiden Ausschläge beieinander. Ab einer Stärke von über 110 (MIDI-Wert), entsteht – durch die hohe Geschwindigkeit der Fingers - nur noch ein Ausschlag, da die Geräusche zeitlich zu nahe beieinander liegen.

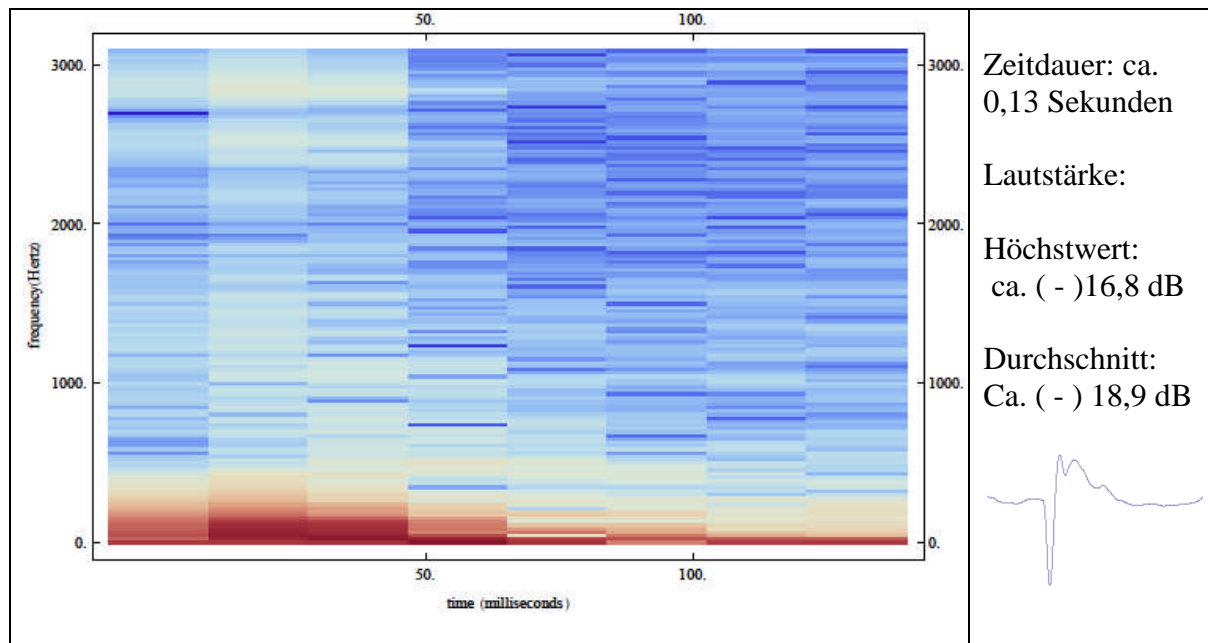
Bemerkenswert ist außerdem das Verhältnis der Intensität (Lautstärke) der beiden verschiedenen Geräusche („oberes“ und „unteres“ Tastengeräusch beim Anschlag aus der Luft). Das „obere“ Tastengeräusch ist im Spektrogramm dunkler dargestellt als das „untere“, ist also etwas lauter. Auch abzulesen ist, dass beim „unteren“ Geräusch mehr höherfrequente Schwingungen (beziehungsweise Geräusche) verursacht werden als beim „oberen“ Tastengeräusch, die zeitlich länger anhalten. Das ist auch der Grund, warum wir beim Anschlagen einer Taste eigentlich – wenn wir überhaupt zwei Geräusche vernehmen – das „untere“ Tastengeräusch fälschlicherweise als lauter empfinden.

4.4. DAS „OBERE“ UND DAS „UNTERE“ TASTENGERÄUSCH

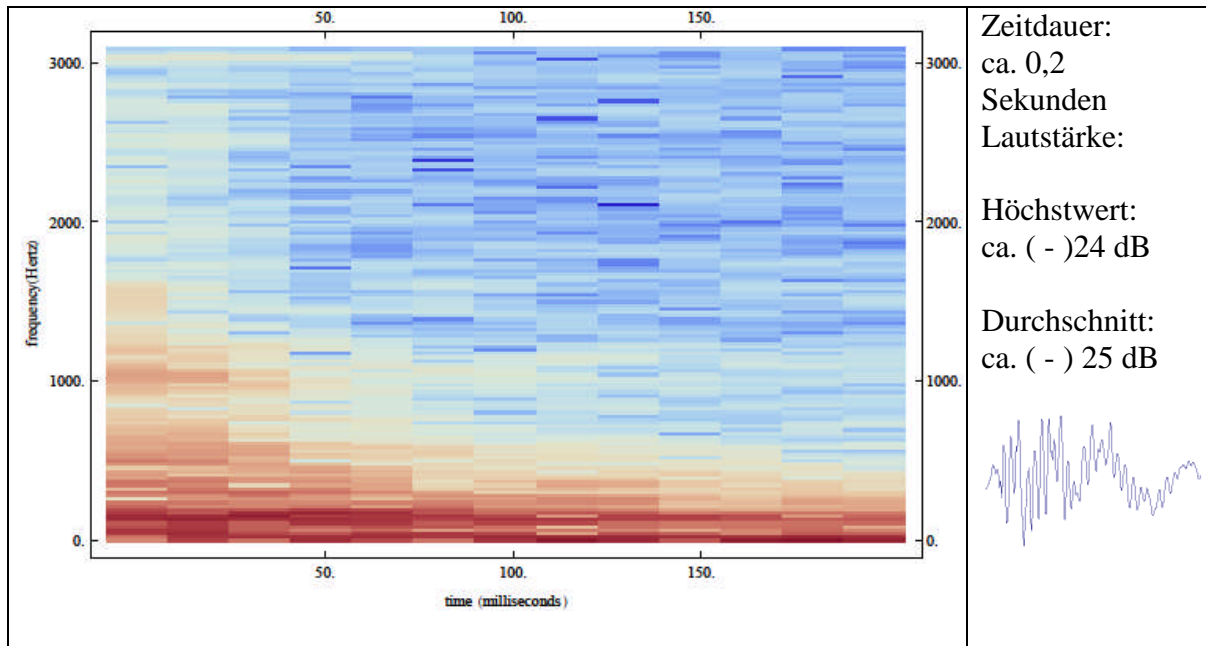
Um das Phänomen „oberes“ und „unteres“ Tastengeräusch genauer zu untersuchen, habe ich beide Geräusche getrennt untersucht.

Die Audiodatei wurde mittels einer Analyse - Software²⁰ in das „obere“ und das „untere“ Tastengeräusch unterteilt, sodass nun die Möglichkeit besteht, von beiden Geräuschen eine separate Klanganalyse durchzuführen. Die Geräusche werden als Spektrogramme dargestellt.

Die nachfolgenden Werte beziehen sich auf die Anschlaggeräusche der Taste „kleines C“ bei einer Anschlagsgeschwindigkeit von 33 (MIDI-Wert).



²⁰ Wavelab (Steinberg)



Die lautesten Frequenzen findet man beim „oberen“ Tastengeräusch zwischen ca. 5 und 50 Herz. Höherfrequente Schwingungen werden so gut wie gar nicht verursacht. Die Ursache für die höhere Tonintensität im Vergleich zum „unteren“ Tastengeräusch liegt unter anderem auch darin, dass die Geschwindigkeit des Fingers gebremst wird, sobald er auf die Taste auftrifft. Die Kraft, mit der die Taste auf den Tastengrund trifft, ist also etwas geringer als die Kraft, mit der der Finger auf die Taste auftrifft.

Das Frequenzspektrum des „unteren“ Tastengeräusches ist etwas breiter als das Spektrum des „oberen“. Besonders laut sind die Frequenzen zwischen ca. 4 und 200 Herz.

Zusammenfassend lassen sich über das Verhältnis der beiden Tastengeräusche folgende Aussagen machen:

1. Das „obere“ Tastengeräusch ist im Verhältnis immer etwas länger und lauter als das „untere“.
2. Mit steigender Anschlagstärke verkleinert sich der zeitliche Abstand beider Geräusche.
3. Die Frequenzen sind unterschiedlich stark verteilt (vgl. Abbildung 5).

4.5. DAS TASTENGERÄUSCH IM VERHÄLTNIS ZUM ERZEUGTEN SAITENKLANG

Der Grund, warum das Tastengeräusch oft nicht beachtet, oder als irrelevant abgetan wird, ist der, dass es vom Zuhörer nicht wahrgenommen wird. Die nachfolgende Tabelle zeigt, wie sich das Tastengeräusch, gemessen an der Tonintensität ²¹ (Durchschnittswert), zum Saitenklang (also dem Gesamtklang) in Abhängigkeit der Anschlagsstärke verhält.

Anschlagswert (MIDI)	Ausgangsposition (Finger)	dB-Durchschnittswert (Tastengeräusch)	dB-Durchschnittswert (Saitenklang)
35	Aus der Luft	-26,82	-33,33
	Von der Taste	-28,24	-32,70
55	Aus der Luft	-18,27	-29,37
	Von der Taste	-26,28	-28,03
75	Aus der Luft	-16,15	-26,49
	Von der Taste	-24,19	-25,72
85	Aus der Luft	-11,75	-25,72
	Von der Taste	-21,81	-23,33
95	Aus der Luft	-10,94	-23,53
	Von der Taste	-20,33	-21,78
105	Aus der Luft	-5,04	-21,70
	Von der Taste	-15,84	-21,42

Auffallend ist, dass die durchschnittliche Tonintensität des Tastengeräusches konstant über dem Durchschnittswert des Saitenklanges liegt. Mit zunehmender Anschlagsstärke vergrößert sich zudem der Abstand. Bei einer geringen Anschlagsstärke liegen die Werte noch vergleichsweise nah beieinander.

²¹ Die (relative) Durchschnittslautstärke ist als negative dB - Zahl angegeben.

Es zeigt sich also, dass das Tastengeräusch eine wichtige Rolle bei der Klangerzeugung spielt. Die erzeugte Gesamtlautstärke bedeutet nicht unbedingt einen lauten Geräuschanteil von der Taste. Einem versierten Pianisten, ist es durchaus möglich durch einen besonders „weichen“ Anschlag das Tastengeräusch bei einer gleichbleibenden Lautstärke zu reduzieren.

Der Geräuschanteil eines Klanges setzt sich aber – neben dem Tastengeräusch – noch aus anderen Anteilen zusammen. Verantwortlich für die geräuschhaften und percussiven Anteile im Klavierklang sind aber auch die inharmonischen Schwingungseigenschaften der Saite selber, die sich in einem „Verschmieren“ des Spektrums, sowie in einer Verschiebung der höheren Partialtöne nach oben (s. Kapitel „Inharmonizitäten“ im Theorieteil (3)) zeigt. Inharmonische Anteile im Frequenzspektrum entstehen z. B. durch dickere Saiten, oder durch die Ummantelung der Basssaiten.

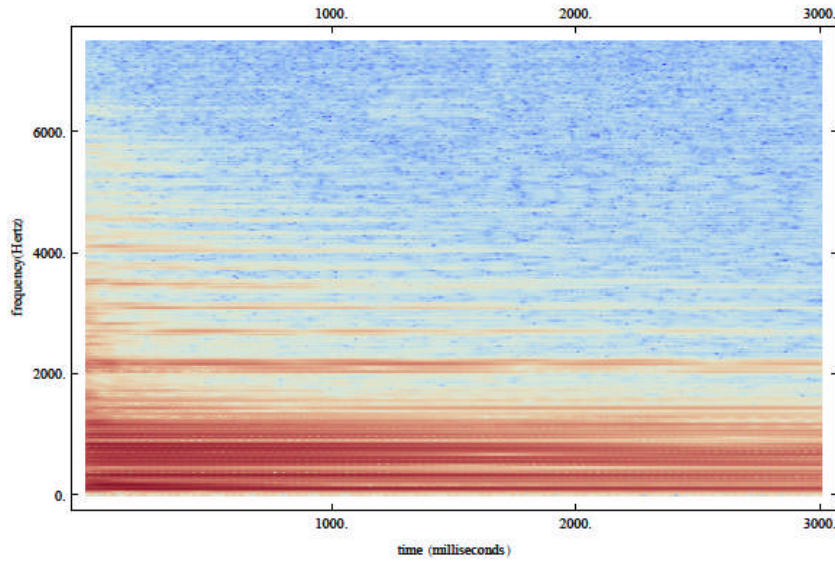
Um diese beiden Anteile besser miteinander vergleichen zu können, wurde mit einem Computerprogramm aus dem Gesamtklang eines Tones der Teil der nicht-periodischen Frequenzanteile herausgerechnet, so dass nun beide separat betrachtet werden können.²²

Der periodische bzw. nichtperiodische Anteil wird manchmal auch als harmonischer bzw. inharmonische Anteil bezeichnet. Das Signal des rein periodischen Anteils klingt etwas unnatürlich und entspricht dem Klang einer (virtuellen, da praktisch nicht existierenden) Klaviersaite, die ideale Schwingungseigenschaften (wie z. Bsp. einen unendlich dünnen Saitendurchmesser von 0) besitzt. Der nicht periodische Anteil enthält in diesem (berechneten, nicht gemessenen Ergebnis) Geräuschanteile (vermutlich vom Hammer und Mechanik) als auch geräuschartige Frequenzanteile, die von der Inharmonizität der Saite selbst kommen.

²² Vielen Dank an Peter Neubäcker, dem Chef der Firma Celemony und Entwickler der Software „Melodyne“, der diese Berechnungen freundlicherweise durchgeführt hat

4.6. HARMONISCHE UND INHARMONISCHE SCHWINGUNGEN

ABBILDUNG 67



Ton: Subkontra - A
Schwingungsart: harmonisch

ABBILDUNG 68

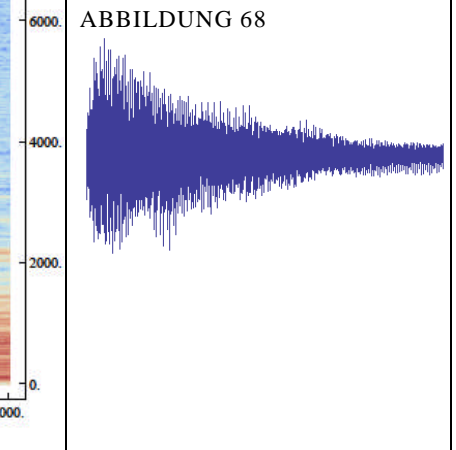
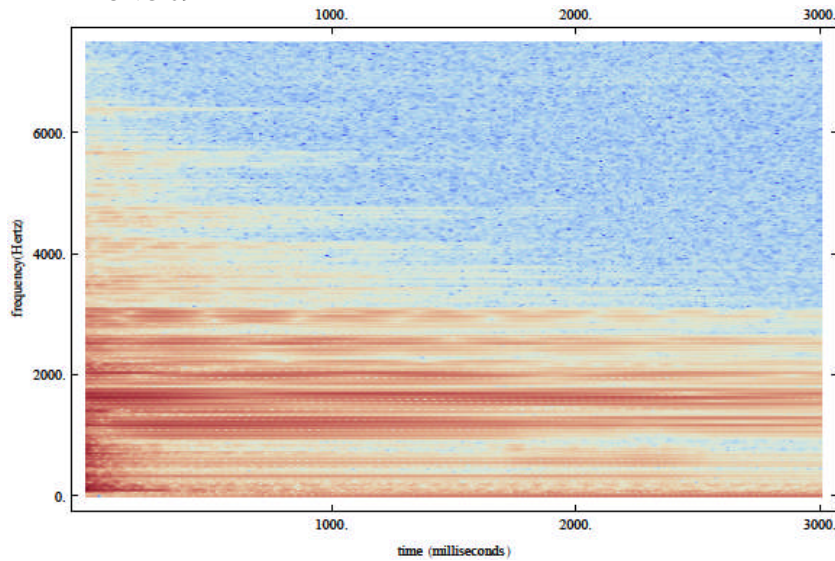


ABBILDUNG 69



Ton: Subkontra - A
Schwingungsart: inharmonisch

ABBILDUNG 70

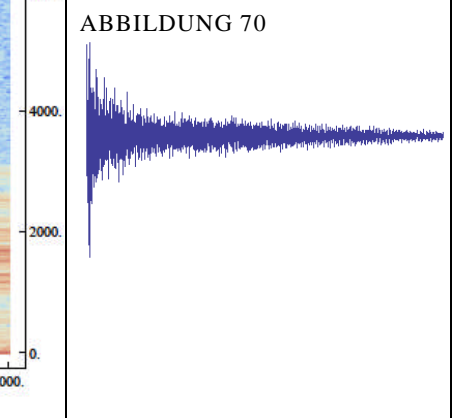
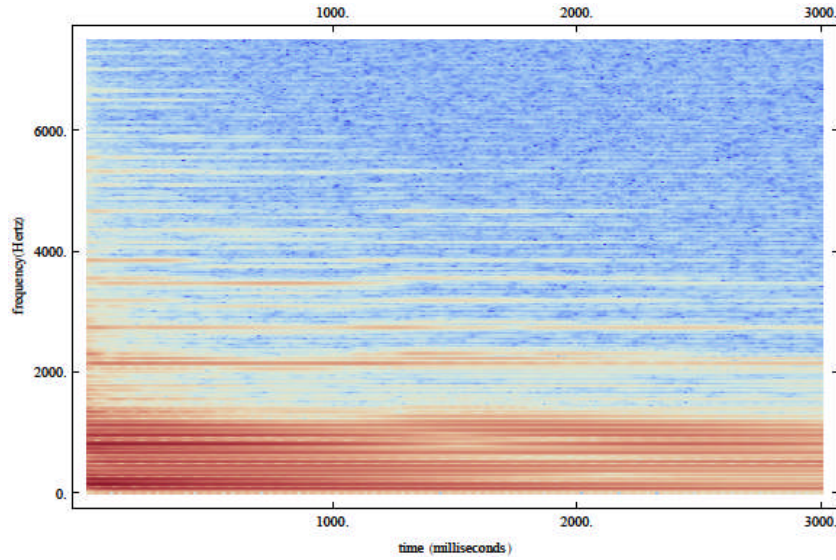


ABBILDUNG 71



Ton: Kontra -D
Schwingungsart: harmonisch

ABBILDUNG 72

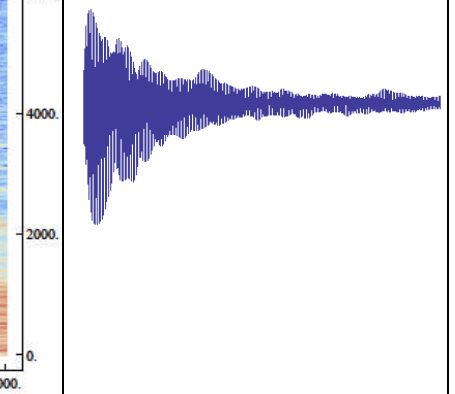
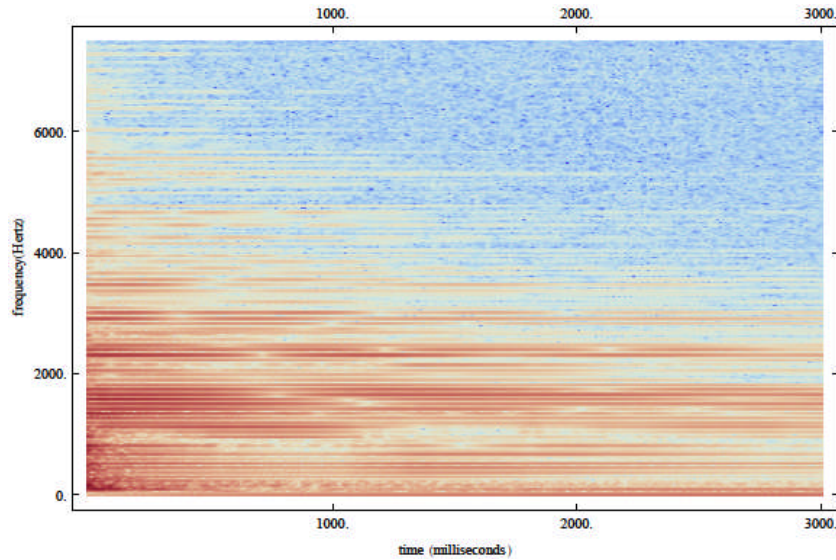


ABBILDUNG 73



Ton: Kontra - D
Schwingungsart: inharmonisch

ABBILDUNG 74

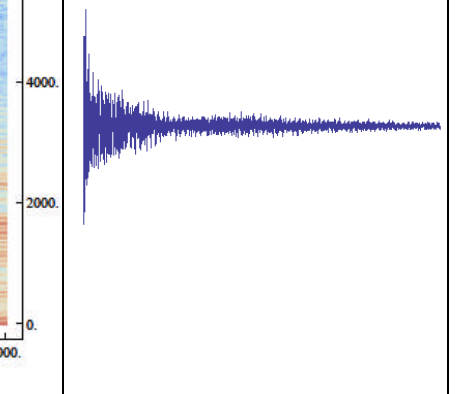
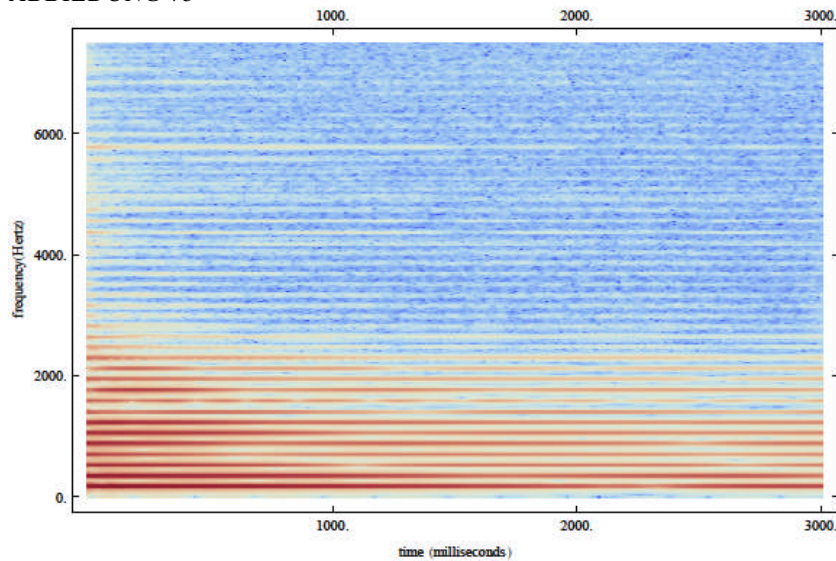


ABBILDUNG 75



Ton: großes F
Schwingungsart: harmonisch

ABBILDUNG 76

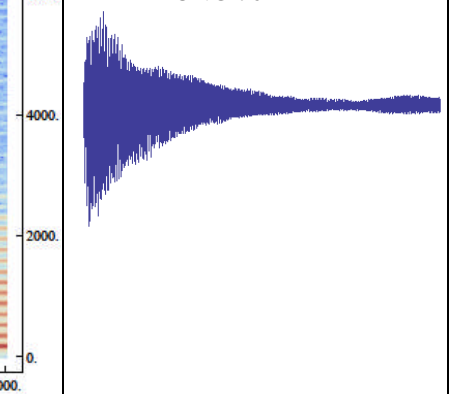
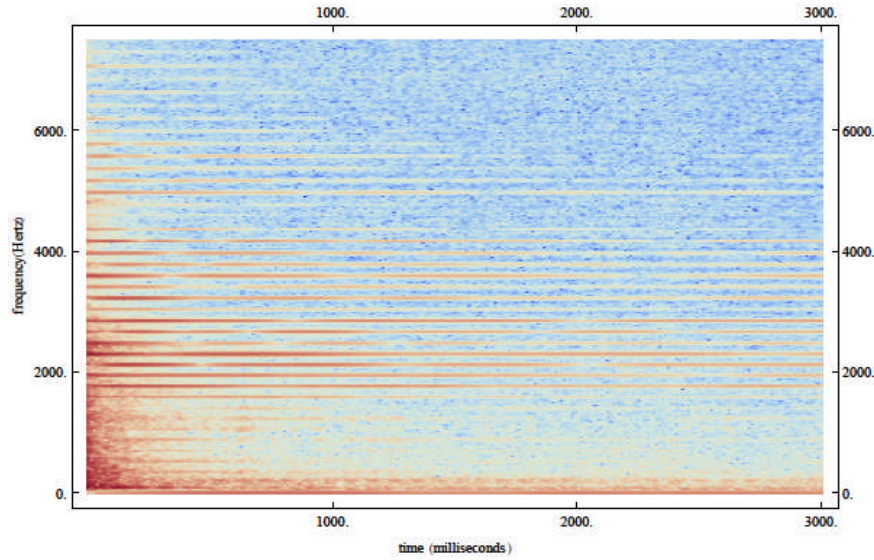


ABBILDUNG 77



Ton: großes F
Schwingungsart:
inharmonisch

ABBILDUNG 78

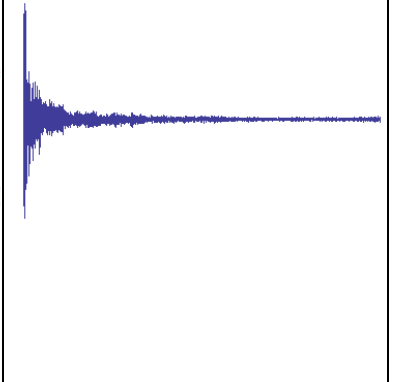
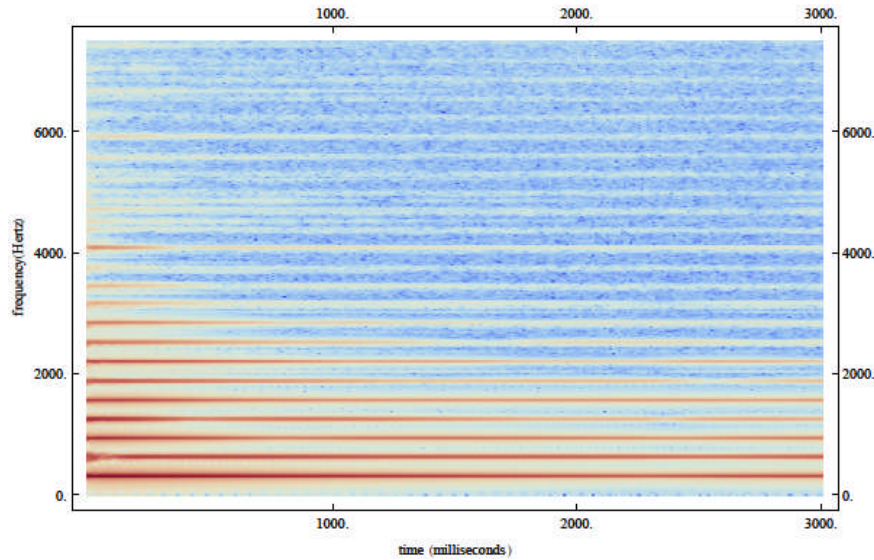


ABBILDUNG 79



Ton: kleines Dis
Schwingungsart: harmonisch

ABBILDUNG 80

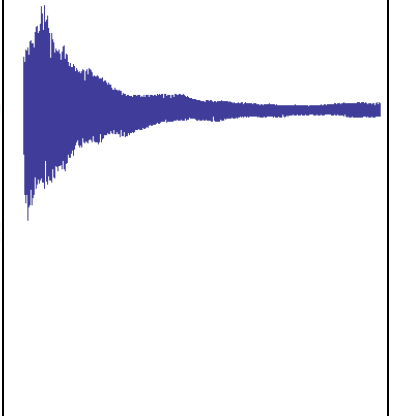
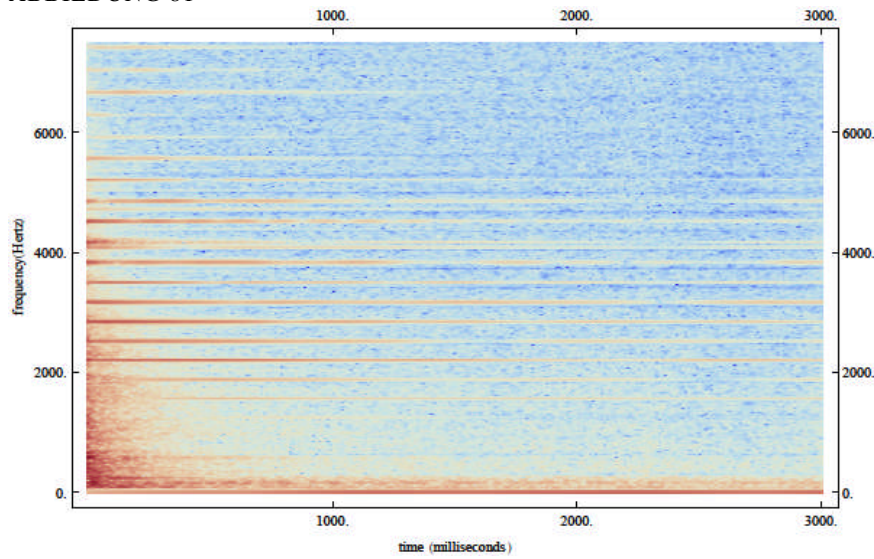
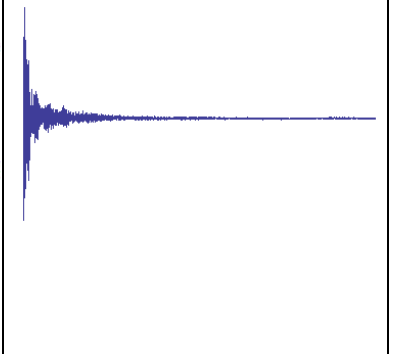


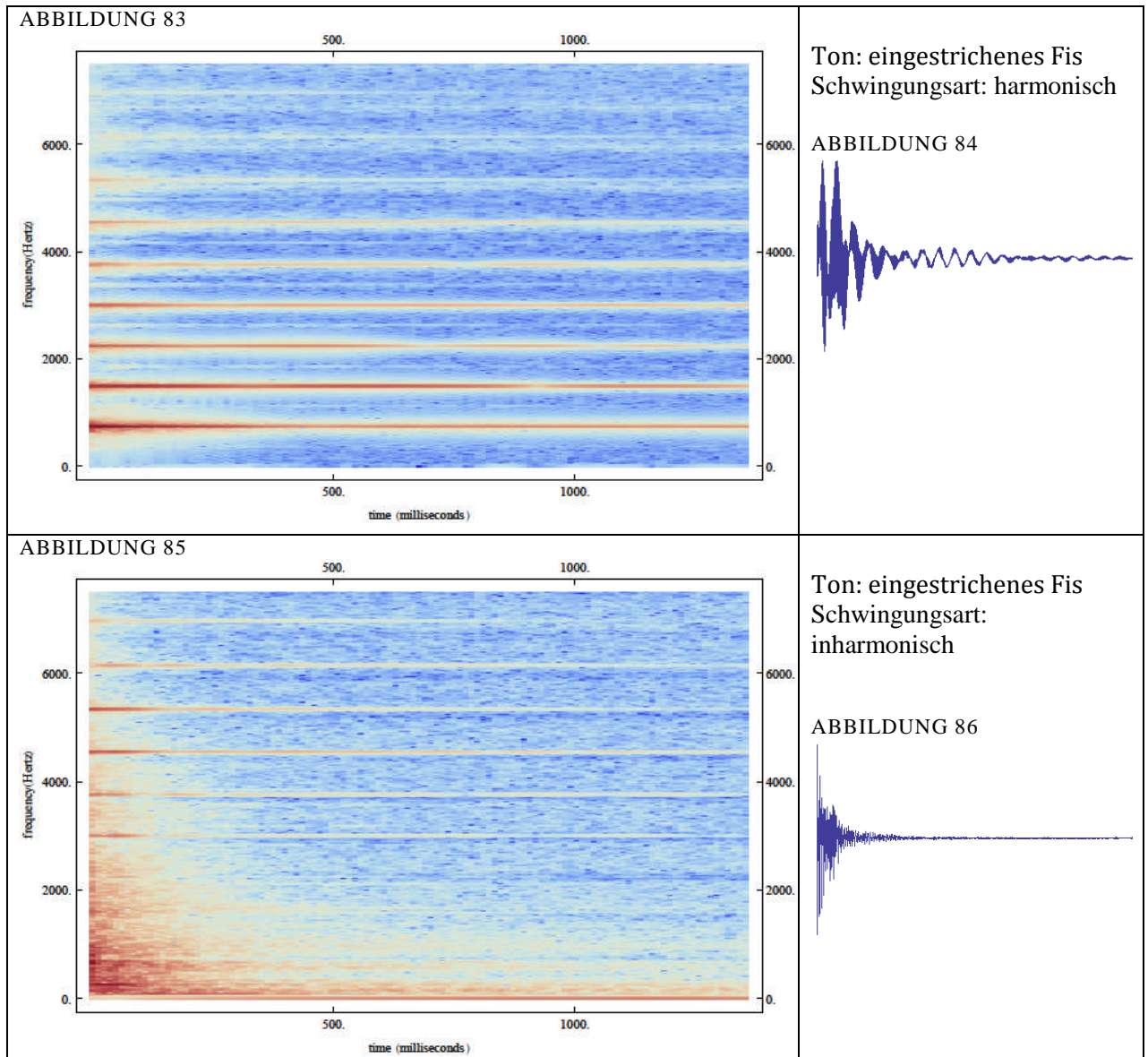
ABBILDUNG 81



Ton: kleines Dis
Schwingungsart:
inharmonisch

ABBILDUNG 82





Folgende Aussagen über die harmonischen und inharmonischen Anteile eines Klavierklanges können festgehalten werden:

- Der Geräuschanteil eines Tones nimmt in Abhängigkeit der Tonhöhe zu
- Der inharmonische Anteil ist mitverantwortlich für die hohen Frequenzanteile und den „brillanteren“ Klang
- Anschlagsgeräusche lassen sich ausschließlich auf den nichtperiodischen, inharmonischen Teil zurückführen.

- Die Amplituden des inharmonischen Spektrums fallen zeitlich schneller ab als der harmonische Anteil, da die Anschlagsgeräusche zeitlich von wesentlich kürzerer Dauer sind.
- Die Inharmonizitäten führen zu einer Verschiebung der höheren Partialtöne nach oben hin zu höheren Frequenzen (siehe Abbildung 7). Diesem Effekt wird praktisch Rechnung getragen, indem bei Klavierstimmungen häufig die sogenannte „gespreizte“ Stimmung verwendet wird, bei der die hohen Töne etwas höher und die tiefen Töne etwas tiefer gestimmt werden. Dies führt dazu, dass die (durch Inharmonizitäten nach oben verschobenen) Partialtöne die von den Tönen der tiefen und mittleren Lage herrühren, besser mit den Grundtönen der hohen Töne zusammen passen und keine unangenehmen Schwebungen entstehen können.

5. DIE WAHRNEHMUNG VON KLANG UND TONINTENSITÄT

Spätestens hier stellt sich die Frage, warum das verhältnismäßig laute Tastengeräusch, kaum oder überhaupt nicht wahrgenommen wird (weder von den Pianisten, noch von den Zuhörern).

Hauptsächlicher Grund dafür ist die unterschiedliche (subjektive) Lautstärkenwahrnehmung von Schall unterschiedlicher Frequenz. Um eine bestimmte Lautstärkeempfindung bei tiefen Frequenzen zu erzeugen, bedarf es einer viel höheren Intensität als das bei höheren Frequenzen der Fall ist. Eine weitere Ursache ist der Effekt der veränderten Lautstärkeempfindung aufgrund der Zeitdauer einer Schalleinwirkung. Die subjektiv empfundene Lautstärke hängt von der Tondauer ab, das heißt, je kürzer ein Tonimpuls ist, desto leiser wird er empfunden und umgekehrt. Nebenbei bemerkt hat dieser Effekt auch für die musikalische Praxis am Klavier wichtige Folgen. Um eine „staccato“ – Passage in einer bestimmten Lautstärke vorzutragen, benötigt man eine sehr viel höhere Anschlagsstärke, als wenn man dieselbe

Passage bei gleicher Lautstärke „legato“ vortragen wollte.²³ Der Grund, warum wir das Tastengeräusch - obwohl es im Gesamtkontext als sehr laut erscheint - kaum oder gar nicht wahrnehmen, sind also einerseits die sehr kurze zeitliche Dauer, die überwiegend niedrigen Frequenzen, sowie andererseits die zeitlich deutlich länger andauernden und höheren Frequenzen der angeschlagenen Saiten.

Die Tatsache der subjektiven Wahrnehmung von Schall und Klangfarbe stellt ohnehin ein Problem für eine wissenschaftliche Untersuchung dar. Eine streng wissenschaftliche Diskussionsgrundlage ist dadurch eigentlich nicht mehr vorhanden. So werden auch Töne beziehungsweise Klänge, gleicher Tonhöhe und Tonintensität von verschiedenen Hörern unterschiedlich wahrgenommen und auch bewertet²⁴

Genauso verhält es sich auch mit der Empfindung und Beschreibung von Klangfarben. Die Antwort auf die Frage, wann ein (Klavier-) Klang als „schön“ empfunden wird, berührt Themen aus der Psychologie und sogar aus der Philosophie. Eine Tendenz hin zu einer „absoluten“ Klangästhetik lässt sich ohnehin oft nur in Abhängigkeit eines Kulturkreises, des Alters oder der (musikalischen) Vorkenntnisse (u. a.) feststellen. Letztendlich hängt sie auch von der momentanen Verfassung und Stimmungslage des Hörers ab:

„So wie die Schönheit im Auge des Betrachters liegen soll, so Musik im Ohr des Hörers. Eine hervorragende Darbietung eines Präludiums von Debussy kann einem, der im Raum nebenan das Wesen einer Beethoven-Sonate zu erfassen sucht, als

²³ Roederer, J. G. (1973). *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*. Berlin: Springer-Verlag, S. 92, 98

²⁴ „Bei der Wahrnehmung von Schall erkennt das Nervensystem als erstes, ‚primitivstes‘ Merkmal wahrscheinlich die Intensität, was zur entsprechenden *Lautstärkewahrnehmung* führt. Der Zusammenhang zwischen Intensität und Lautstärke hängt weniger von Feinstrukturen des Reizes ab als vielmehr vom gesamten Energiefluss. Als nächstes Merkmal behandelt das Hörsystem die Periodizität eines Klangs (die mit der örtlichen Verteilung neuronaler Impulse gekoppelt ist). Dieser Erkennungsprozeß liefert die Empfindung der subjektiven *Tonhöhe*. Auf der dritten Verfeinerungsstufe wird das Leistungsspektrum des Tons analysiert, was zur Empfindung der *Klangfarbe* führt.“ (Juan G. Roederer, *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*, Springer-Verlag, ISBN 3-540-56640-6, S. 154)

schrecklicher Lärm erscheinen. Und das grässliche Geheul eines Krankenwagens kann Musik sein in den Ohren dessen, der angstvoll auf ihn wartet“²⁵

Pianisten können sich einen Nebeneffekt der subjektiven Wahrnehmung von Klängen zu Nutze machen, denn die wahrgenommene Tonhöhe eines Tones hängt auch mit der Lautstärke (Tonintensität) zusammen:

„Der Pianist kann die Höhe des einzelnen Tones nicht so verändern wie der Geiger oder der Sänger. Mit Hilfe der dynamischen Differenzierung kann er aber eine vollkommene Illusion erwecken. (Er schlägt den Ton, den er als einen höheren hört, etwas stärker an.) In diesem Sinne kann der Pianist genauso gut oder schlecht intonieren wie der Geiger oder der Sänger. Der Unterschied besteht nur darin, dass der Sänger tatsächliche Tonhöhenunterschiede zustande bringt, während der Pianist durch die entsprechende Verteilung der Dynamik die Zuhörer denselben Ton nach Bedarf höher oder tiefer empfinden lässt. [...]. Derselbe Ton wird also je nach seiner harmonischen Umgebung, infolge dynamischer Schattierung, höher oder tiefer vernommen. Falls den Pianisten in seinem Spiel wirklich seine musikalische Phantasie leitet, werden die dynamischen Unterschiede genau jenen Unterschieden entsprechen, die zwischen der vorgestellten Tonhöhe und den temperierten Tönen des Klaviers bestehen, und sie werden auf diese Weise im Hörer den Eindruck der gleichen Harmonien erwecken, die sich der Künstler vorgestellt hat.“²⁶

²⁵ Tayler, C. (1994). *Der Ton macht die Physik*. Braunschweig/Wiesbaden: Freidr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mnH, S. 8

²⁶ Gát, J. (1973). *Die Technik des Klavierspiels*. Kassel, Basel, London: Bärenreiter .S. 13

6. SCHLUSSBETRACHTUNG

Betrachtet man nun alle Komponenten, die notwendig sind um den uns bekannten Klavierklang zu erzeugen, wird schnell klar, dass es sich beim Klavier (bzw. Flügel) um ein hochkomplexes Instrument handelt, in welchem die Klangerzeugung durch das Zusammenwirken einer Vielzahl verschiedenster Faktoren abhängt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Analyse einzelner Töne (außerhalb eines musikalischen Kontexts). Es hat sich herausgestellt, dass die Klangfarbe eines einzelnen Tones (bei gleichbleibender Lautstärke) letztendlich durch die Verwendung verschiedener Anschlagstechniken beeinflussbar ist, wobei das Tastengeräusch eine wichtige Rolle spielt. In einem musikalischen Kontext betrachtet, ergeben sich jedoch weitaus mehr Möglichkeiten der Klanggestaltung, da hier Aspekte wie Agogik, oder auch die Verteilung der Lautstärkeverhältnisse innerhalb eines mehrstimmigen Klanges, sowie die Pedalisierung eine wichtige Rolle einnehmen.

Der Pianist also hat folgende Möglichkeiten, dem Klavierklang seine Handschrift zu verleihen:

- Der Anschlag (die „Beimischung“ von Tastengeräuschen)
 - o Weicher Anschlag (Reduzierung des Tastengeräusches)
 - o Harter Anschlag (Verstärkung des Tastengeräusches)
 - o Anschlag aus der Luft (also mit oberem Tastengeräusch)
 - o Anschlag von der Taste (nur unteres Geräusch)
- Pedalisierung (ohne das mittlere „Sostenuto“-Pedal)
 - o Linkes Pedal
 - o Rechtes Pedal
- Agogik
- Dynamik
 - o Lautstärkenverhältnisse in einem Mehrklang

Allein durch die schier riesige Anzahl der kombinatorischen Möglichkeiten der einzelnen Parameter, lässt sich ein „einzigartiger“ Klavierklang formen.

„Natürlich ist keine Rede davon, dass man daran denken müsste, einen stärkeren oder schwächeren, geräuschvollen oder geräuscharmen Ton zu spielen. Wenn uns klar geworden ist, dass wir die Taste immer in der einfachsten Weise berühren müssen, dann folgt daraus logischerweise, dass es im Wesentlichen keine scharf voneinander abgrenzbaren Anschlagarten gibt, sondern nur eine unendliche Variantenreihe der Tastenberührung. Indem sie sich der intensiven Klangvorstellung anpasst, kann unsere Hand die Dynamik, die Agogik und die Geräuschwirkungen auf eine Weise dosieren, dass damit im Zuhörer eine vollkommene Illusion erweckt wird. Wenn wir die Dynamik, die Agogik und die Geräuschwirkungen gesetzmäßig, also immer genau unseren Vorstellungen entsprechend anwenden, können wir das als Verschlüsselung unserer Vorstellungen für das Instrument betrachten.“²⁷

Hauptmitverantwortlich für einen aussagekräftigen, ästhetischen und vor allem authentischem Klavierklang ist daher eine exakte und verinnerlichte Klangvorstellung. Nur durch sie schafft es der Pianist die Phantasie seiner Zuhörerschaft zu erwecken.

²⁷ Gát, J. (1973). *Die Technik des Klavierspiels*. Kassel, Basel, London: Bärenreiter, S. 14

LITERATURVERZEICHNIS

Budo, A. (1978). *Theoretische Mechanik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Gát, J. (1973). *Die Technik des Klavierspiels*. Kassel, Basel, London: Bärenreiter.

H. Flether, E. D. (1962). Quality of piano tones. *J. Acoust. Soc. Am* , 34.

Kratzert, R. (2002). *Technik des Klavierspiels*. Kassel: Bärenreiter.

Laible, U. (1993). *Fachkunde Klavierbau*. Bergkirchen: PPVMEDIEN GmbH, Edition
Bochinsky.

Roederer, J. G. (1973). *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*. Berlin:
Springer-Verlag.

Taylor, C. (1994). *Der Ton macht die Physik*. Braunschweig/Wiesbaden: Freidr. Vieweg &
Sohn Verlagsgesellschaft mH.

Weinrich, G. (Januar 1979). The Coupled Motions of Piano Strings. *Scientific American* .

Das folgende Mathematica-Notebook (Datei: ZA_AudioSpectrogram_Sounds_with_FileSetter.nb, siehe CD im Anhang) wurde verwendet, um Spektrogramme von den Sound-Dateien zu erzeugen²⁸:

```

Manipulate[Module[{sound, soundData, flip, startSam, endSam},
  If [changeDir == True || DirectoryQ[currentDirectory] == False,
    changeDir = False;
    dialog = CreateDialog[{"TextCell["Choose your folder:"],
  InputField[Dynamic[currentDirectory]],
    fs = FileNameSetter[Dynamic[currentDirectory], "Directory",
    Method -> "Preemptive"], DefaultButton[], Modal -> True];
  ];
  (*FileNameSetter[Dynamic[x], "Directory"], DefaultButton[], Modal \[Rule] True];*)

  If [refresh == True, refresh = False, refresh = true];
  if [changedir == False, ClearAll[fs]; ClearAll[dialog]];
  If[DirectoryQ[currentDirectory] == False, MessageDialog["directory not found"];
  currentDirectory = currentDirectoryOld, SetDirectory[currentDirectory]];
  If[currentDirectory != currentDirectoryOld,
  tempFileNames = FileNames[{"*.aif", "*.aiff", "*.wav"}]];
  If[currentDirectory != currentDirectoryOld && Length[tempFileNames] > 0,
  fileNames = FileNames[{"*.aif", "*.aiff", "*.wav"}]; lengthFileNames = Length[fileNames];
  currentDirectoryOld = currentDirectory;
  textDirectory = currentDirectory];
  If[currentDirectory != currentDirectoryOld && Length[tempFileNames] == 0,
  MessageDialog["no sound files found in directory!"]; currentDirectory =
currentDirectoryOld;
  SetDirectory[currentDirectory]];
  sound = Import[fileNames][[snd]];
  sr = sound[[1, 2]];
  soundData = sound[[1, 1, 1]];
  lenData = N[Length[soundData]];
  (*EmitSound[sound];*)

  If[snd != sndOld, startTime = 0; dur = Min[3, lenData/sr];
  allDurs = Append[Select[Range[20], # <= lenData/sr &], lenData/sr];
  sndOld = snd];
  If[startTime + dur > lenData/sr, dur = lenData/sr - startTime;];
  flip = Identity;
  If[display == ReliefPlot || display == ListContourPlot,
  flip = Reverse];
  startSam = Ceiling[startTime sr + 1];
  endSam = Floor[(startTime + dur) sr];

```

²⁸ *Mathematica* ist eine Software, mit der mathematische Berechnungen durchgeführt werden können. Genaueres findet der geneigte Leser unter <http://www.wolfram.de>.

```

If[play == True,
  EmitSound[
    SampledSoundList[soundData[[Range[startSam, endSam]]], sr];
  play = False];

plotWave = ListPlot[soundData[[Range[startSam, endSam, 30]]], Joined -> True, Axes
-> False, PlotRange -> All];
display[flip[Log[specGram[soundData, 2048, 4, {startSam, endSam}, per]]],
ColorFunction -> col,
  DataRange -> {{1000 startSam/sr, 1000 endSam/sr}, {0, per sr}}, FrameTicks ->
Automatic, AspectRatio -> 0.63,
  ImageSize -> 600, FrameLabel -> flip[{"frequency (Hertz)", "time (milliseconds)"}]],
(* end of Module *)

```

(* Play Sound-Button*)

```

Column[{
  (* erste Zeile: Sound und Color Schema*)
  Row[{
    Spacer[20],
    Control[{{snd, 1, "sound"}, Thread[Range[lengthFileNames] -> fileNames[[All]]],
ControlType -> PopupMenu]],
    Spacer[20],
    Control[{{col, "ThermometerColors", "color scheme"}, allColors}],
    Spacer[20],
    Dynamic[textDirectory],
    Spacer[20],
    "# files: ", Dynamic[lengthFileNames]
  }],
  (* Zweite Zeile (Spalte starttime,duration, magnify) und Arraplot und ply sound*)
  Row[{Column[
    {
      Control[{{startTime, 0.2, "start time"}, 0, Dynamic[lenData/sr - dur]}],
      Control[{{dur, Min[3, lenData/sr], "duration"}, Dynamic[allDurs]}],
      Control[{{changeDir, False, "change directory"}, {False, True}}],
      Control[{{refresh, False, "refresh"}, {False, True}}],
      Control[{{per, 0.17, "magnify"}, 0.47, 0.02}]
    },
    Spacer[10],
    (* Arrayplot-Button*)
    Control[{{display, ArrayPlot, ""}, {ArrayPlot, MatrixPlot, ReliefPlot, ListContourPlot},
ControlType -> PopupMenu]],
    Spacer[10],
    (* Play Sound-Button*)
    Control[{{play, False, "play sound"}, {False, True}}],
    Spacer[20],
    (* kleine Darstellung der Wellenform (rechts) *)
    Dynamic[plotWave]]

```

```
}},
```

```
{plotWave, 0, ControlType -> None},  
{sr, 22050, ControlType -> None},  
{lenData, 10000, ControlType -> None},  
{allDurs, {1}, ControlType -> None},  
{sndOld, 1, ControlType -> None},  
{fileNamesOld, 1, ControlType -> None},  
{currentDirectoryOld, 1, ControlType -> None},  
{currentDirectory, 1, ControlType -> None},  
{lengthFileNames, 1, ControlType -> None},
```

```
{textDirectory, 1, ControlType -> None},
```

```
TrackedSymbols -> {refresh, snd, dir, sndOld, currentDirectoryOld, changeDir, col,  
startTime, dur, per, display, play, sr, lenData, allDurs}, SaveDefinitions -> True]
```

**Das folgende Mathematica-Notebook (Datei:
PlotSpectrumSaiteAnschlagMitHammer.nb, siehe CD im Anhang) wurde
verwendet, um ein berechnetes Spektrum zu plotten:**

```
DiscretePlot[Abs[ $\frac{\text{Sin}[\frac{n\pi}{20}]\text{Sin}[\frac{n\pi}{2}]}{n^2}$ ], {n, 1, 17}, ExtentSize -> Full, ExtentElementFunction  
-> "FadingRectangle", PlotRange -> All]
```


HERLEITUNG UND LÖSUNG DER SCHWINGUNGSGLEICHUNGEN EINER EINGESPANNTEN SAITE

Die Herleitung der Schwingungsgleichung einer gespannten Saite ist in der einschlägigen Literatur in zahlreichen Fachbüchern und Artikeln beschrieben. Es folgt eine ausführliche, mit Erläuterungen versehene Herleitung, die auch für einen Nicht-Physiker verständlich ist. Abitur-Grundwissen in Mathematik und Physik wird jedoch vorausgesetzt.

Die Herleitung folgt im Wesentlichen den Ausführungen von A. Budo (*Theoretische Mechanik*, siehe Literaturverzeichnis).

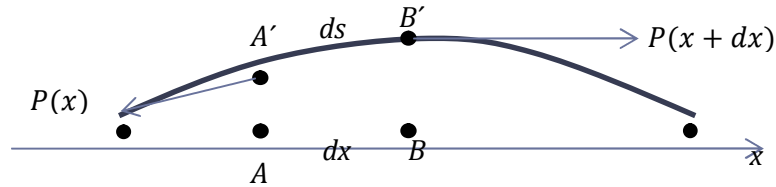
Zunächst machen wir einige vereinfachende Voraussetzungen, damit die Beschreibung nicht zu kompliziert wird.

- Eine Saite sei im Folgenden ein dünner elastischer Körper mit verschwindend kleinem Querschnitt, so dass wir nur Dehnungskräfte, nicht jedoch Biegekräfte betrachten müssen. Diese Annahme ist für kleine Querschnitte plausibel, da der Dehnungswiderstand proportional zu R^2 ist, die Biegesteifigkeit jedoch für kleiner werdende Querschnitte wesentlich schneller mit R^4 abnimmt.
- Wir vernachlässigen den Einfluss der Schwerkraft auf die eingespannte Saite, da die Kräfte der Saitenspannung ein Vielfaches der Gravitationskräfte aufgrund der Saitenmasse betragen.

Der folgende Ansatz geht davon aus, dass die schwingende Saite drei Freiheitsgrade besitzt (entsprechend den zu erwartenden zwei Freiheitsgraden für die Transversalschwingungen, die quer zur Saite verlaufen, sowie einer Longitudinalschwingung in Richtung der Saite). Die Koordinaten dieser drei Freiheitsgrade entsprechen den drei Raumdimensionen und werden bei dieser Herleitung mit den Buchstaben ξ , η und ζ bezeichnet.

Weiter benutzen wir bei der Herleitung Differentiale (dx sowie partielle Differentiale $\partial\xi$). Die Größen ξ , ζ und η seien infinitesimale Größen, deren Produkte weggelassen werden dürfen.

Wir betrachten die Punkte A und B (ruhende Saite) bzw. A' und B' (Saite zum Zeitpunkt t). A und B haben im ruhenden Zustand den Abstand dx voneinander, nach der Zeit t befinden sie sich in der Lage A' und B' mit dem Abstand ds:



Wir betrachten die kleinen Verschiebungen $\overline{AA'}$ mit den Komponenten ξ, η, ζ und $\overline{BB'}$ mit den Komponenten $\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx$, dann lauten die Koordinaten von A' und B':

$$A' = \begin{pmatrix} x + \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \\ \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \\ \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \end{pmatrix}$$

Für das Bogensegment ds gilt (da $ds \gg \partial \xi, \partial \zeta, \partial \eta$ und infinitesimal klein):

$$ds = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ interpretieren wir als relative Dehnung von } dx. \text{ Für die}$$

$$\text{Richtungskosinuse von } A'B' \text{ gilt: } \cos \alpha = 1, \cos \beta = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \cos \gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Betrachten wir die Kraftkomponenten, die am Saitenstück A'B' angreifen: Die in A' wirkende Spannung ist die Summe aus der Saitenspannung P und der von der Dehnung hervorgerufenen Spannung, die nach dem hookeschen Gesetz $E \frac{\partial \xi}{\partial x}$ beträgt (mit $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ als relativer Dehnung). Die Komponenten der bei A' in negativer ds-Richtung wirkenden Kraft sind: $-q(P + E \frac{\partial \xi}{\partial x}) \cos \alpha$, usw... Mit den Richtungskosinussen ergeben sich die Kraftkomponenten zu:

$$\begin{pmatrix} -q(P + E \frac{\partial \xi}{\partial x}) \\ -qP \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -qP \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Kraftkomponenten der bei B' in positiver ds -Richtung wirkenden Kraft können wir erhalten, in dem wir die Taylorentwicklung von (1) bis zur 1.ten Ordnung an der Stelle $x + dx$ bilden. Addieren wir die so erhaltenen Ausdrücke zu (1), so erhalten wir die Komponenten der Gesamtkraft auf das Saitenstück $A'B'$:

$$Q_{gesamt} = \begin{pmatrix} qE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \\ qP \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx \\ qP \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx \end{pmatrix} \quad (2)$$

Nun setzen wir nach dem Newtonschen Gesetz ($F = m \cdot a$, mit den

Beschleunigungskomponenten $a_i: \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ sowie der Masse des Saitenstückes:

$m = \rho q dx$) gleich, dann erhalten wir die drei Bewegungsgleichungen der schwingenden

Saite:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (\text{mit } P = \frac{Q}{q}) \quad (3)$$

Oder wenn wir den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten von transversalen bzw. longitudinalen Wellen und den Größen e, P und q berücksichtigen:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_{tr} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{Q}{\rho q}} \quad (4)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_{tr}^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c_{tr}^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}} \quad (\text{Schwingungsgleichungen einer Saite}) \quad (5)$$

Die drei Bewegungsgleichungen, die die schwingende Saite beschreiben sind partielle Differentialgleichungen 2.ter Ordnung. Da alle drei Gleichungen die gleiche Form haben und die beiden Gleichungen der Transversal-Schwingung identisch sind, betrachten wir für die Lösung der Differentialgleichungen der Einfachheit halber die Gleichung:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

(Allgemeine Schwingungsgleichung einer Saite, mit $c = c_l$ oder c_{tr}) (6)

LÖSUNG:

Da die Saite an den Anfangs- und Endpunkten eingespannt und daher in Ruhe ist, setzen wir zur Lösung dieser Differentialgleichung folgende Randbedingungen fest (mit l als Saitenlänge):

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (7)$$

Partielle Differentialgleichung dieser Art löst man gewöhnlich durch einen Produktansatz und versucht durch Separierung der Variablen die Gleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückzuführen:

$u(x, t) = U(x) \cdot V(t)$

In (6) eingesetzt ergibt sich: $U(x) \frac{d^2 V(t)}{dt^2} = c^2 V(t) \frac{d^2 U(x)}{dx^2}$ oder umgeformt:

$$\frac{\frac{d^2 U(x)}{dx^2}}{U(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 V(t)}{V(t)} \quad (8)$$

Man sieht, dass die linke Seite von (8) nur allein von x , die rechte Seite nur allein von t abhängt. Folglich kann (8) für alle Werte von x und t nur dann gelten, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten sind. Die Konstante wählen wir zu $-k^2$. Wir hätten auch irgend eine andere Konstante wählen können; die Form $-k^2$ vereinfacht jedoch die Darstellung der Lösungsfunktionen.

Die sich so ergebenden Gleichungen

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -k^2 U(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 V(t)}{dt^2} = -k^2 c^2 V(t) \quad (9)$$

haben (wie der geneigte Leser sofort erkennt) folgende Partikularlösungen:

$$U(x) = \cos kx \quad \text{und} \quad U(x) = \sin kx$$

$$V(t) = \cos kct \quad \text{und} \quad V(t) = \sin kct$$

Nun zu den Randbedingungen: Da $U(0) = U(l) = 0$ sein scheidet die Lösung $U(x) = \cos kx$ aus. Die Lösung $\sin kx$ gilt nur dann, wenn $k = k_n = n \frac{\pi}{l}$.

Folglich haben wir folgende Lösungen für $U(x)$ und $V(t)$:

$$U_n(x) = \sin n \frac{\pi}{l} x, \quad V_n(t) = \sin n \frac{\pi}{l} ct, \quad \text{sowie} \quad V_n(t) = \cos n \frac{\pi}{l} ct \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Der Ausdruck $\nu_n = n \frac{c}{2l}$ besitzt die Einheit Hz und wird üblicherweise

Schwingungszahl genannt, damit lässt sich (10) etwas schöner schreiben:

$$U_n(x) = \sin n \frac{\pi}{l} x, \quad V_n(t) = \sin 2\pi\nu_n t, \quad \text{sowie} \quad V_n(t) = \cos 2\pi\nu_n t \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10a)$$

Die Funktionen $U_n(x)$ und $V_n(t)$ werden Eigenfunktionen, die Werte k_n^2 Eigenwerte.

Die Ausdrücke werden auch Eigenfrequenzen des Systems genannt. Damit haben wir für $u(x, t) = U(x) \cdot V(x)$ folgende partielle Lösungen (partielle Lösungen dürfen mit beliebigen Konstanten a_n und b_n multipliziert werden):

$$u(x, t) = b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \sin 2\pi\nu_n t, \quad \text{sowie} \quad u(x, t) = a_n \sin n \frac{\pi}{l} x \cos 2\pi\nu_n t$$

Eine Eigenschaft der Differentialgleichung (6), die Mathematiker Linearität nennen, bewirkt, dass auch jede mögliche Summe der partiellen Lösungen eine Lösung der Bewegungsgleichung darstellt.

Somit ist die allgemeinste Lösung unserer Bewegungsgleichung für die eingespannte schwingende Saite gefunden:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \frac{\pi}{l} x (a_n \cos 2\pi\nu_n t + b_n \sin 2\pi\nu_n t) \quad (11)$$

Hinweis: Wir können der Randbedingung (7) noch eine sogenannte Anfangsbedingung hinzufügen, die die räumliche Form $u(x, 0)$ und die 1. te zeitliche Ableitung $u'(x, 0)$ unserer Lösungsfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt:

$$u(x, 0) = F(x) \text{ und } \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x,0} = G(x) \quad (12)$$

Beispiel: Wenn wir die Saite in der Mitte ,anzupfen‘ (mit der Auslenkung h) bekommt sie zum Zeitpunkt $t = 0$ eine ,dreieckige‘ Form, d.h. $F(x)$ beschreibt eine Dreiecksfunktion,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ 2h\left(1 - \frac{1}{l}x\right), & \frac{l}{2} \leq x < l \end{cases} \quad G(x) = 0$$

Beispiel: Wenn die Saite in der Mitte von einem Hammer der Breite b und der Geschwindigkeit v_0 angeschlagen wird, lauten die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$, die die Anfangsbedingungen festlegen:

$$F(x) = \begin{cases} v_0, & \frac{l-b}{2} \leq x \leq \frac{l+b}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Setzen wir auch diese Anfangsbedingung als gegeben voraus so lassen sich die Konstanten a_n und b_n berechnen. Ohne mathematische Herleitung sei hier mitgeteilt (Quelle: Budo, A. (1978). *Theoretische Mechanik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 404)

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12a)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi l v_n} \int_0^l G(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12b)$$

a_n und b_n sind die sogenannte ,Fourierkoeffizienten‘ der Anfangsfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ mit denen sich $F(x)$ und $G(x)$ als unendliche Fourierreihe darstellen lassen. Mit Hilfe trigonometrischer Umformungen und durch Definition von: $a_n = C_n \sin \gamma_n$ und $b_n = C_n \cos \gamma_n$ können wir (11) noch etwas schöner schreiben. Die Lösung unserer Bewegungsgleichung (6) mit den Randbedingungen (7) und den Anfangsbedingungen (12) lautet

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin(2\pi\nu_n t + \gamma_n) \quad (13)$$

Hinweis: Eine einfache Rechnung zeigt: $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\gamma_n = \text{atan} \frac{a_n}{b_n}$

HÖRBEISPIEL - CD

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) Anschlagsgeräusch (ADL, MIDI – Wert: 35) | 20) C3 (VDT, MIDI – Wert: 23) |
| 2) Anschlagsgeräusch (ADL, MIDI – Wert: 51) | 21) C3 (VDT, MIDI – Wert: 41) |
| 3) Anschlagsgeräusch (ADL, MIDI – Wert: 79) | 22) C3 (VDT, MIDI – Wert: 50) |
| 4) Anschlagsgeräusch (ADL, MIDI – Wert: 88) | 23) C3 (VDT, MIDI – Wert: 75) |
| 5) Anschlagsgeräusch (ADL, MIDI – Wert: 100) | 24) C3 (VDT, MIDI – Wert: 83) |
| 6) Anschlagsgeräusch (ADL, MIDI – Wert: 110) | 25) C3 (VDT, MIDI – Wert: 90) |
| 7) Anschlagsgeräusch (VDT, MIDI – Wert: 35) | 26) C3 (VDT, MIDI – Wert: 98) |
| 8) Anschlagsgeräusch (VDT, MIDI – Wert: 51) | 27) C1 (VDT, MIDI – Wert: 75) |
| 9) Anschlagsgeräusch (VDT, MIDI – Wert: 79) | 28) C2 (VDT, MIDI – Wert: 75) |
| 10) Anschlagsgeräusch (VDT, MIDI – Wert: 88) | 29) großes C (VDT, MIDI – Wert: 75) |
| 11) Anschlagsgeräusch (VDT, MIDI – Wert: 100) | 30) Subkontra A (Harmonisch) |
| 12) Anschlagsgeräusch (VDT, MIDI – Wert: 110) | 31) Subkontra A (Inharmonisch) |
| 13) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 23) | 32) Kontra D (Harmonisch) |
| 14) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 41) | 33) Kontra D (Inharmonisch) |
| 15) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 50) | 34) großes F (Harmonisch) |
| 16) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 75) | 35) großes F (Inharmonisch) |
| 17) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 83) | 36) kleines Dis (Harmonisch) |
| 18) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 90) | 37) kleines Dis (Inharmonisch) |
| 19) kleines C (VDT, MIDI – Wert: 98) | 38) Fis1 (Harmonisch) |
| | 39) Fis 1 (Inharmonisch) |

ERKLÄRUNG

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benützt habe. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, sind in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Dies gilt auch für alle graphischen Darstellungen

(Sebastian Kuhl)